



POLITECNICO DI BARI



DIPARTIMENTO DI
ELETTROTECNICA
ED ELETTRONICA

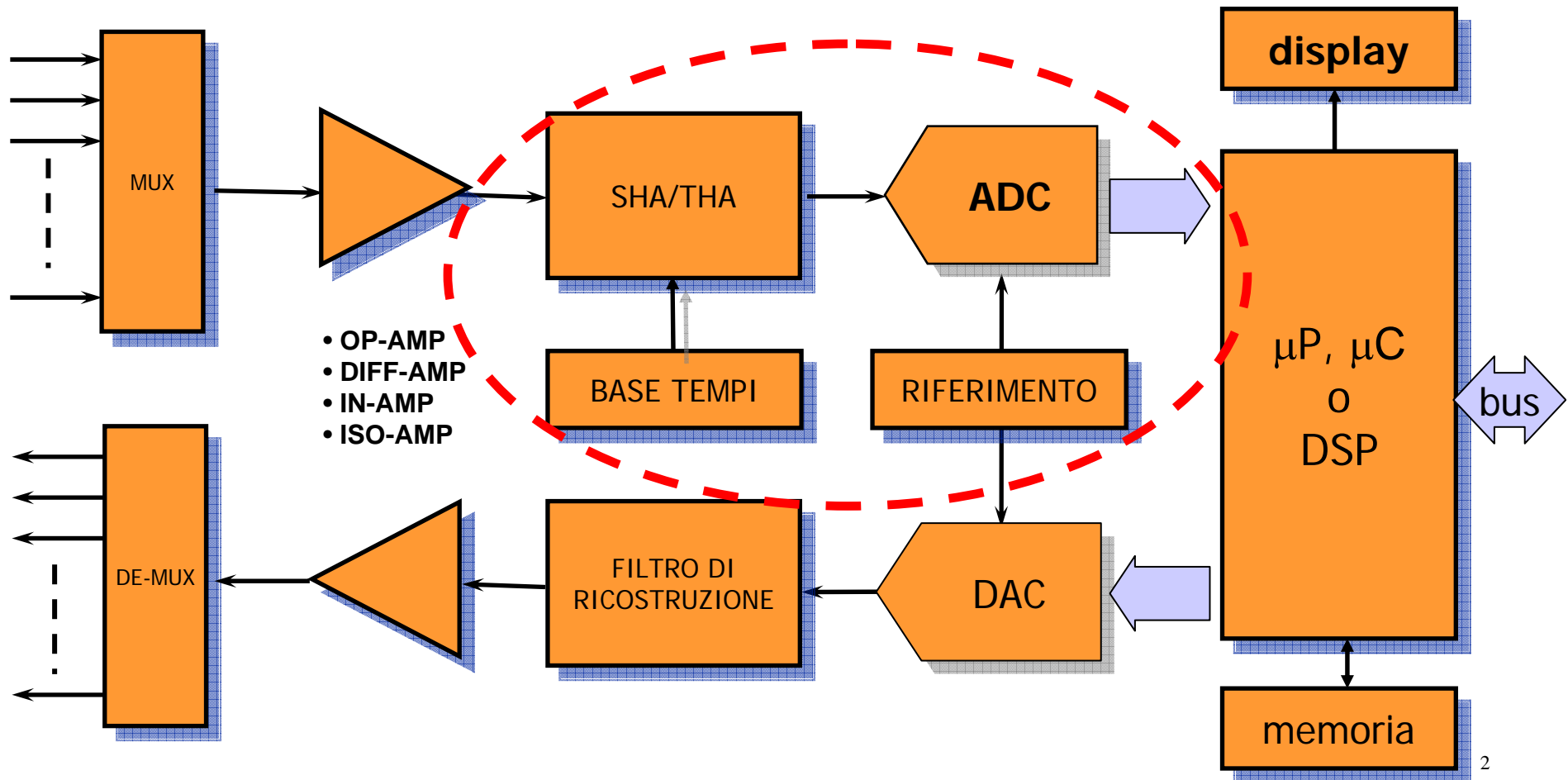
GRUPPO MISURE ELETTRICHE ED ELETTRONICHE

**CdL Specialistica in Ingegneria delle TLC
Corso di Misure sui Sistemi di TLC**

La conversione Analogico/Digitale

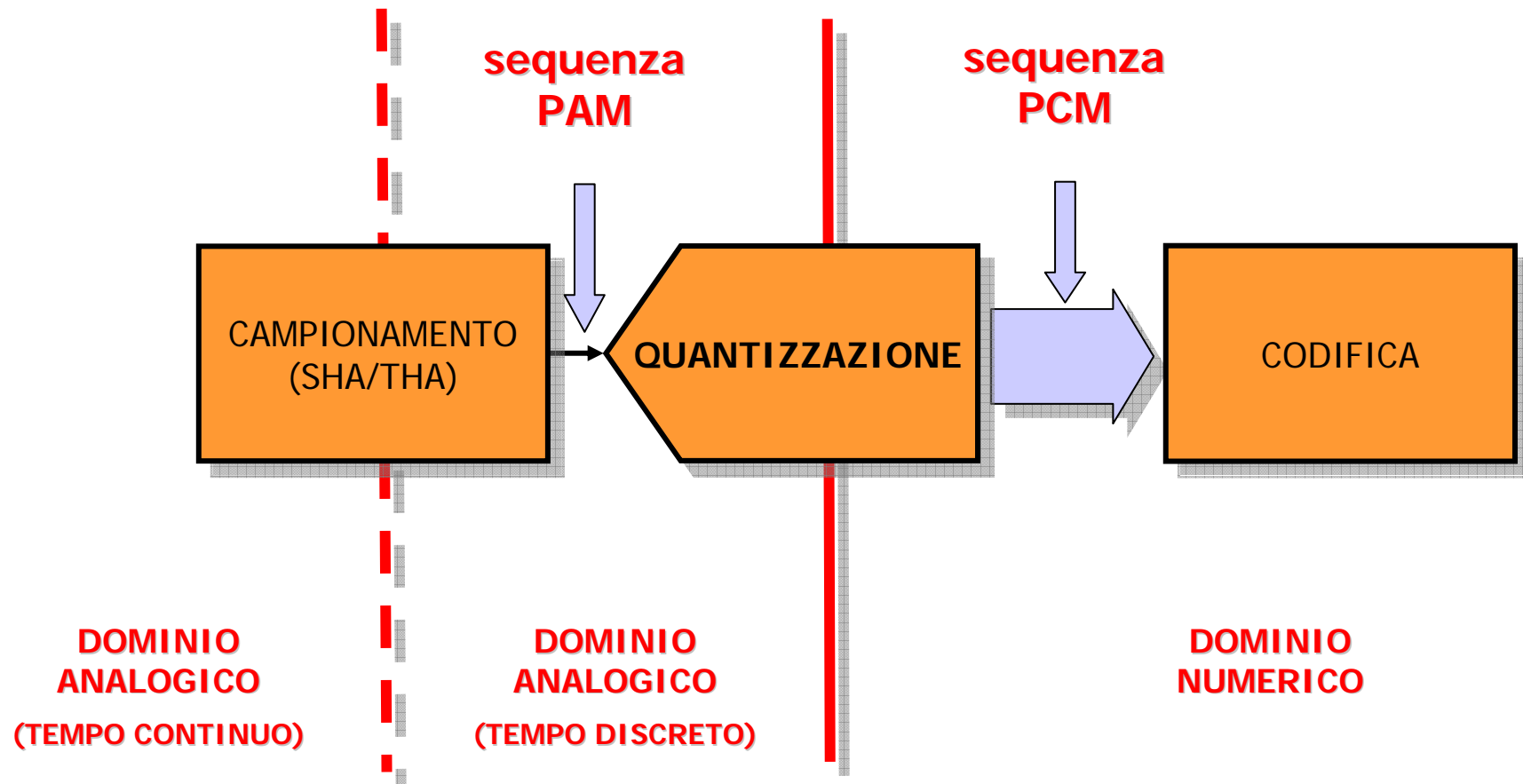
Introduzione

La conversione analogico/digitale ha un ruolo determinante nell'attuale realtà applicativa (settori consumer, industriale, militare, ecc.)



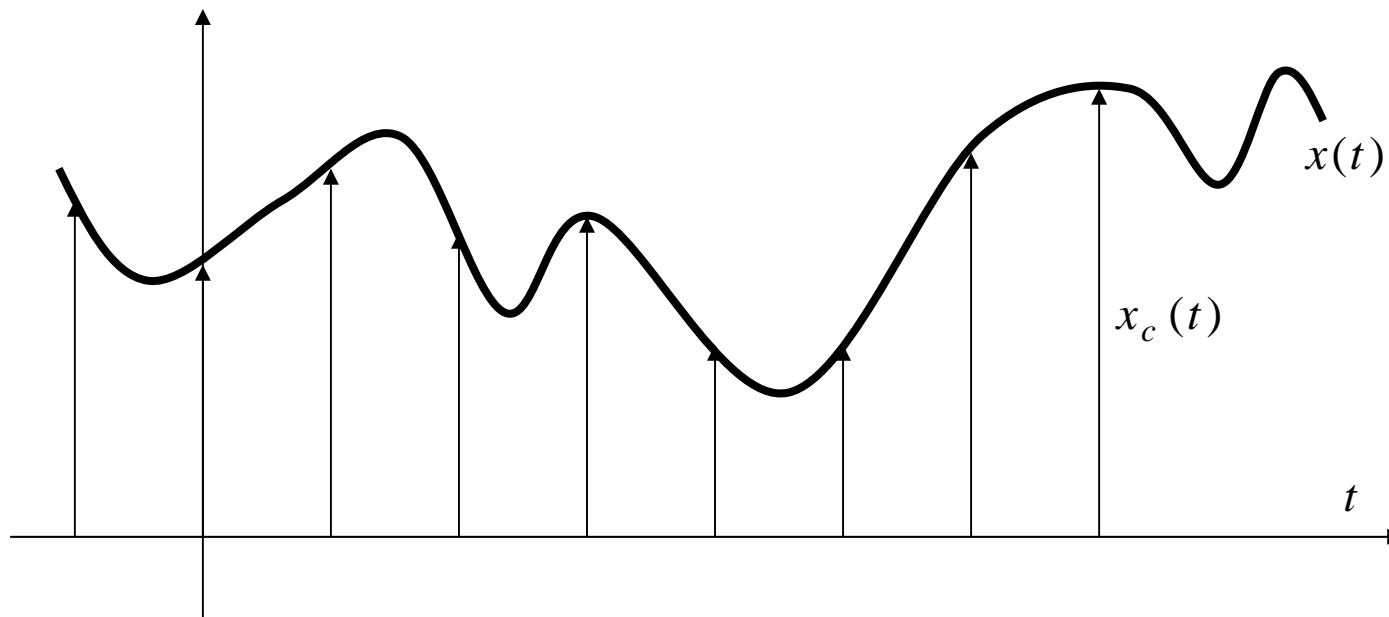
Introduzione

Il processo di conversione A/D: schema a blocchi



Il Caso Ideale

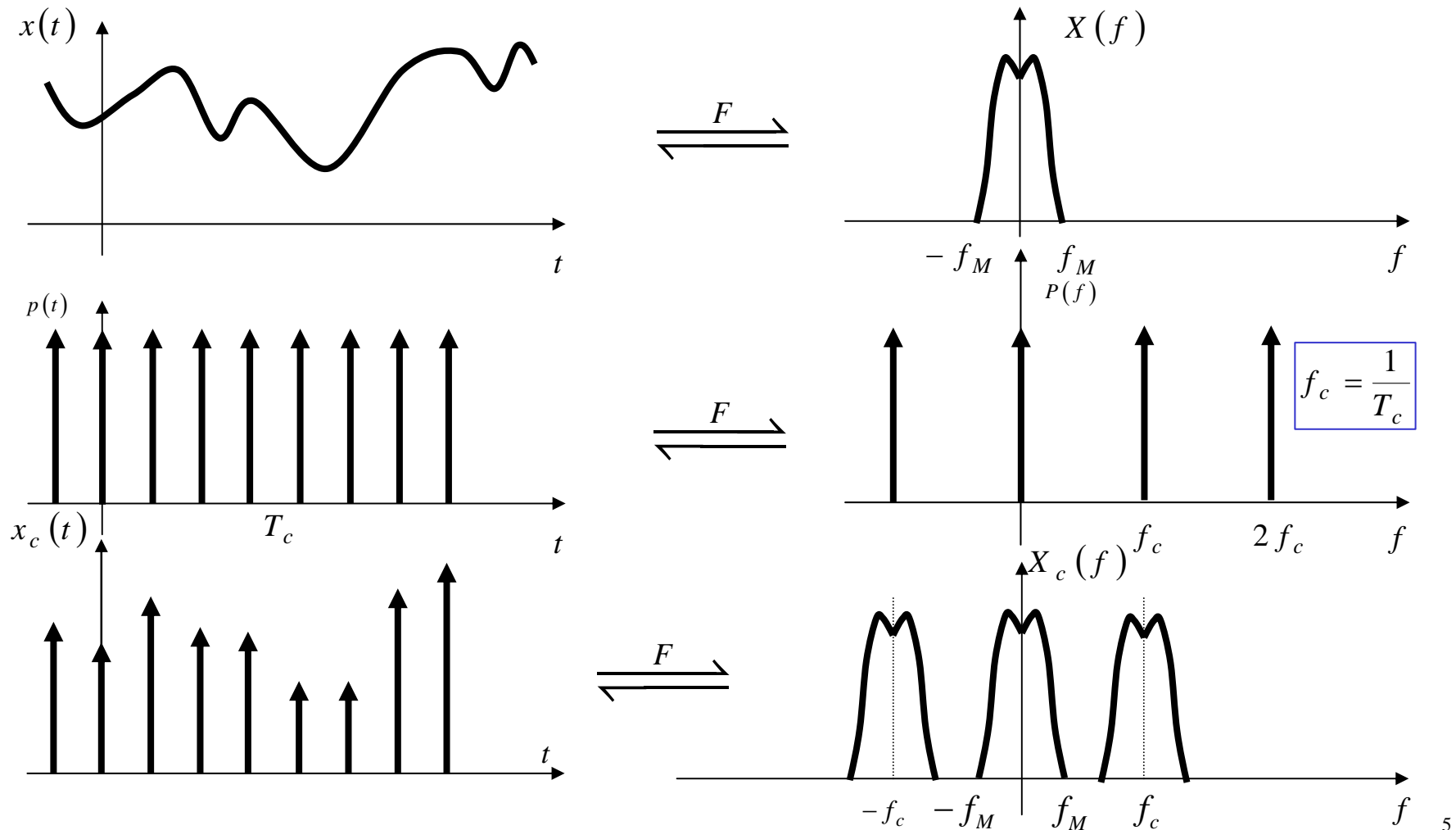
La maggior parte della strumentazione digitale moderna ottiene le misurazioni di interesse lavorando su campioni numerici del segnale analogico in ingresso



Quindi un problema teorico e pratico fondamentale è la ricostruzione del segnale sulla base dei suoi campioni

Campionamento ideale

Campionare un segnale nel dominio del tempo con periodo T_c equivale nel dominio della frequenza a replicare infinite volte lo spettro del segnale a cavallo di frequenze multiple intere di $\omega_c = 2\pi/T_c$, ovvero $f_c = 1/T_c$



formalmente possiamo scrivere (teorema del campionamento):

$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c) \quad \xLeftrightarrow{F} \quad X_c(\omega) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_c) = X(\omega) * S(\omega)$$

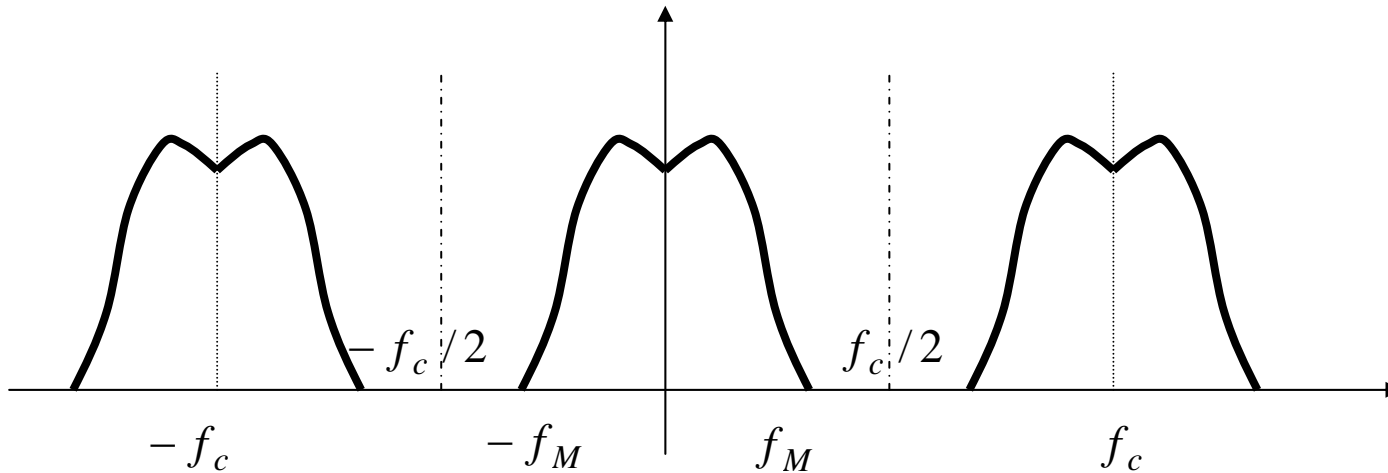
ossia

se da un segnale variabile nel dominio del tempo possiamo estrarre una successione illimitata di campioni equi-intervallati con periodo T_c , questa successione costituisce una funzione tempo-discreta che contiene l'informazione del segnale di partenza nell'ipotesi che:

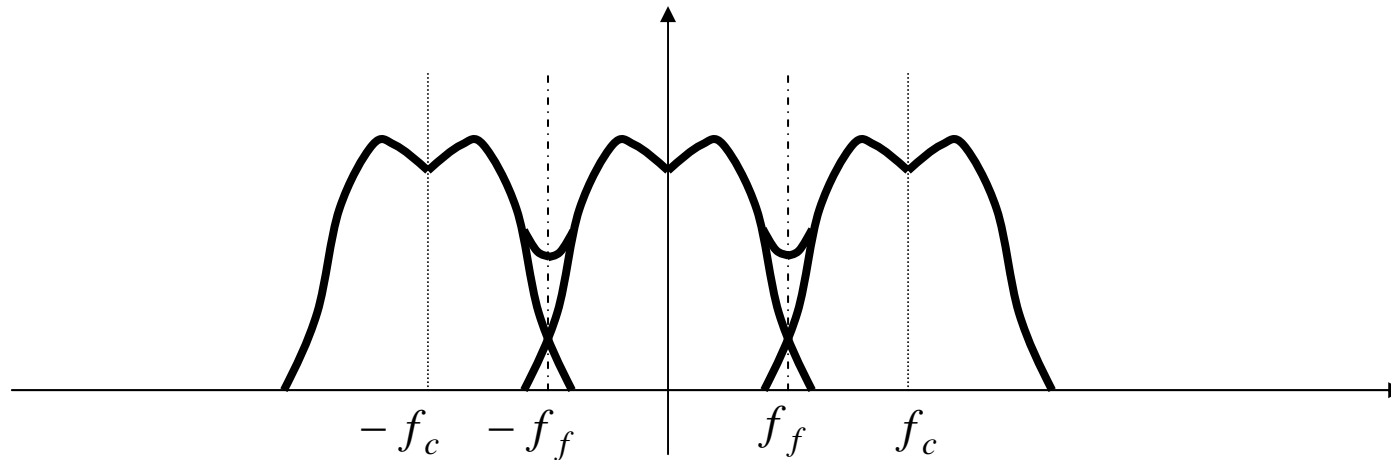
- lo spettro del segnale di partenza abbia un contenuto armonico limitato alla frequenza massima f_M
- la frequenza di campionamento f_c sia superiore (al più uguale) al doppio di f_M

Dal teorema si deduce che:

- 1) se lo spettro $X(f)$ del segnale è nullo al di sopra di una frequenza massima f_M , e la frequenza di campionamento è $f_c \geq 2f_M = f_N$ (frequenza di Nyquist), lo spettro (e quindi il segnale) originario è ricostruibile senza errori dal segnale campionato;



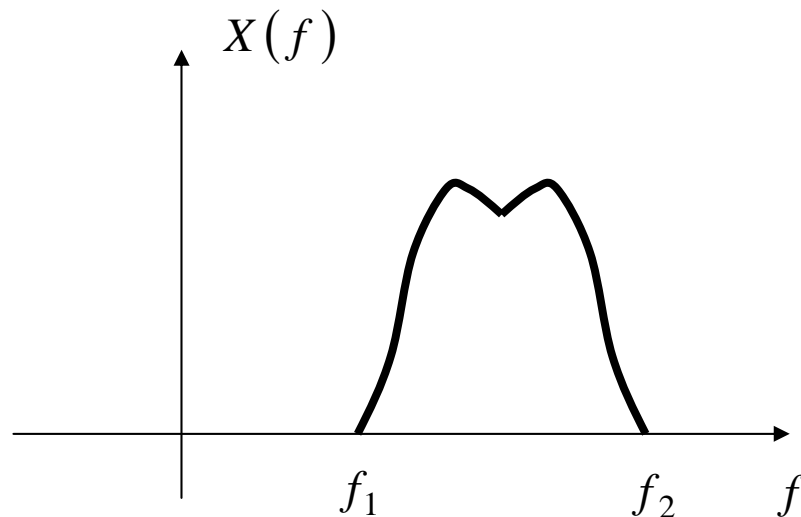
- 2) se invece lo spettro $X(f)$ non ha una frequenza massima, oppure $f_c < 2f_M$, lo spettro (e quindi il segnale) originario è perso per sempre. Si è prodotto un irricostruibile errore di aliasing.



La deformazione dello spettro può essere vista come suo “ripiegamento” (*folding*) alla frequenza $f_f = f_c / 2$, detta appunto *frequenza di folding*.

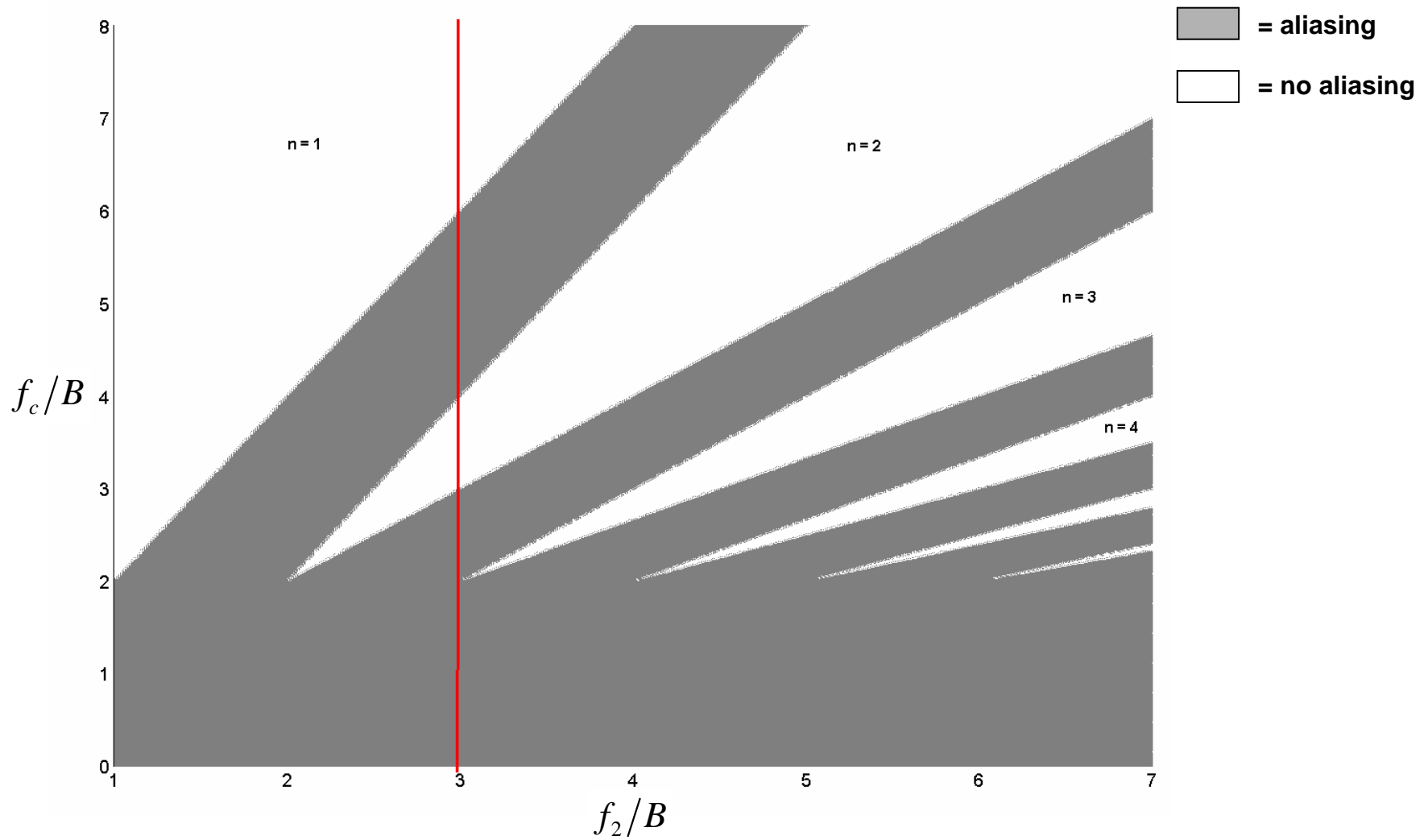
Campionamento di segnali passa-banda

Una estensione del teorema del campionamento assicura la ricostruibilità del segnale senza perdita di informazioni anche per segnali di tipo "passa banda", ossia quelli aventi spettro non comprendente la frequenza nulla. Per essi è possibile campionare con una frequenza doppia della banda del segnale riducendo considerevolmente la f_c nel caso di segnali a banda stretta:



$$f_c \geq 2B$$

FA1



$$\frac{2f_2}{nB} \leq f_c \leq \frac{2f_1}{(n-1)B}$$

con $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{f_2}{B} \right\rfloor$ (numero intero più grande $\leq f_2/B$)

Diapositiva 10

FA1

da "The Theory of Bandpass Sampling" di R.G. Vaughan, N. L. Scott, D. R. White, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, No. 9, September 1991, pagg. 1973-1985

Codice MATLAB per generare la figura:

```
fs = 0:0.01:8;
fu = 1.01:0.01:7;
[FU, FS] = meshgrid(fu, fs);
FL = FU - 1;
d = zeros(size(FU));
for k = 1:floor(max(fu));
    d = d + ((FS > 2*FU/k) .* (FS < 2*FL/(k-1)));
end;
colormap([0.5, 0.5, 0.5]; [1, 1, 1]);
mesh(fu, fs, d);

view([0, 0, 1]);
xlabel('f2/B');
ylabel('fc/B');
```

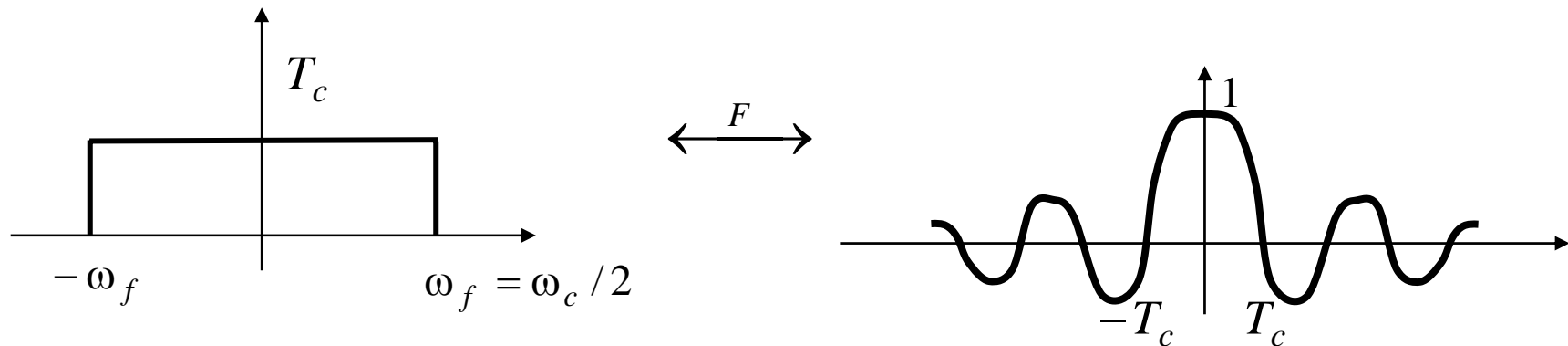
Francesco Adamo; 25/04/2006

Quando il teorema di campionamento è rispettato la ricostruzione del segnale originario è ottenuta, evidentemente, dal filtraggio passa basso ideale a frequenza $f_c / 2$ del segnale campionato (dal filtraggio passa banda nel caso di segnale non in banda base).

Questo filtro ha risposta in frequenza di tipo rettangolare e quindi risposta all'impulso di tipo seno cardinale:

$$H(j\omega) = T_c \text{rect}(\omega / \omega_c)$$

$$h(t) = \frac{\text{sen } \omega_f t}{\omega_f t}$$



Convolgendo il segnale campionato con la risposta all'impulso del filtro si ottiene la seguente formula detta interpolazione seno cardinale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \frac{\text{sen } \omega_f (t - nT_c)}{\omega_f (t - nT_c)}$$

Essa permette la ricostruzione perfetta del segnale a partire dai suoi campioni

questo è un filtro numerico (ideale) e non un filtro analogico al cui ingresso porre gli “impulsi” del segnale campionato.

L'interpolazione sinc è teoricamente perfetta ma richiede infiniti campioni del segnale

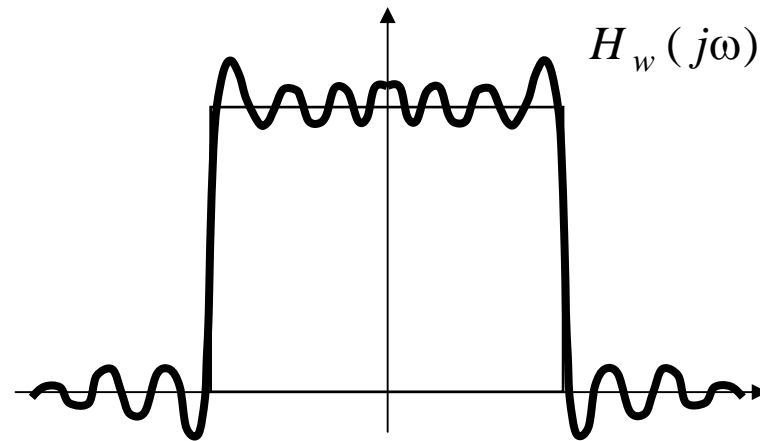
In pratica quindi essa è attuabile solo con una certa approssimazione. Un esempio potrebbe essere una formula troncata a $2N+1$ campioni, del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x(nT_c) \frac{\text{sen } \omega_f (t - nT_c)}{\omega_f (t - nT_c)}$$

Ciò equivale a trattare il segnale campionato con un filtro la cui risposta all'impulso è un seno cardinale troncato.

Un simile filtro ha una risposta in frequenza che approssima male la risposta del filtro passabasso ideale

Lo spettro del seno cardinale troncato con finestra rettangolare è un rettangolo con forti oscillazioni in prossimità della discontinuità (fenomeno di Gibbs)

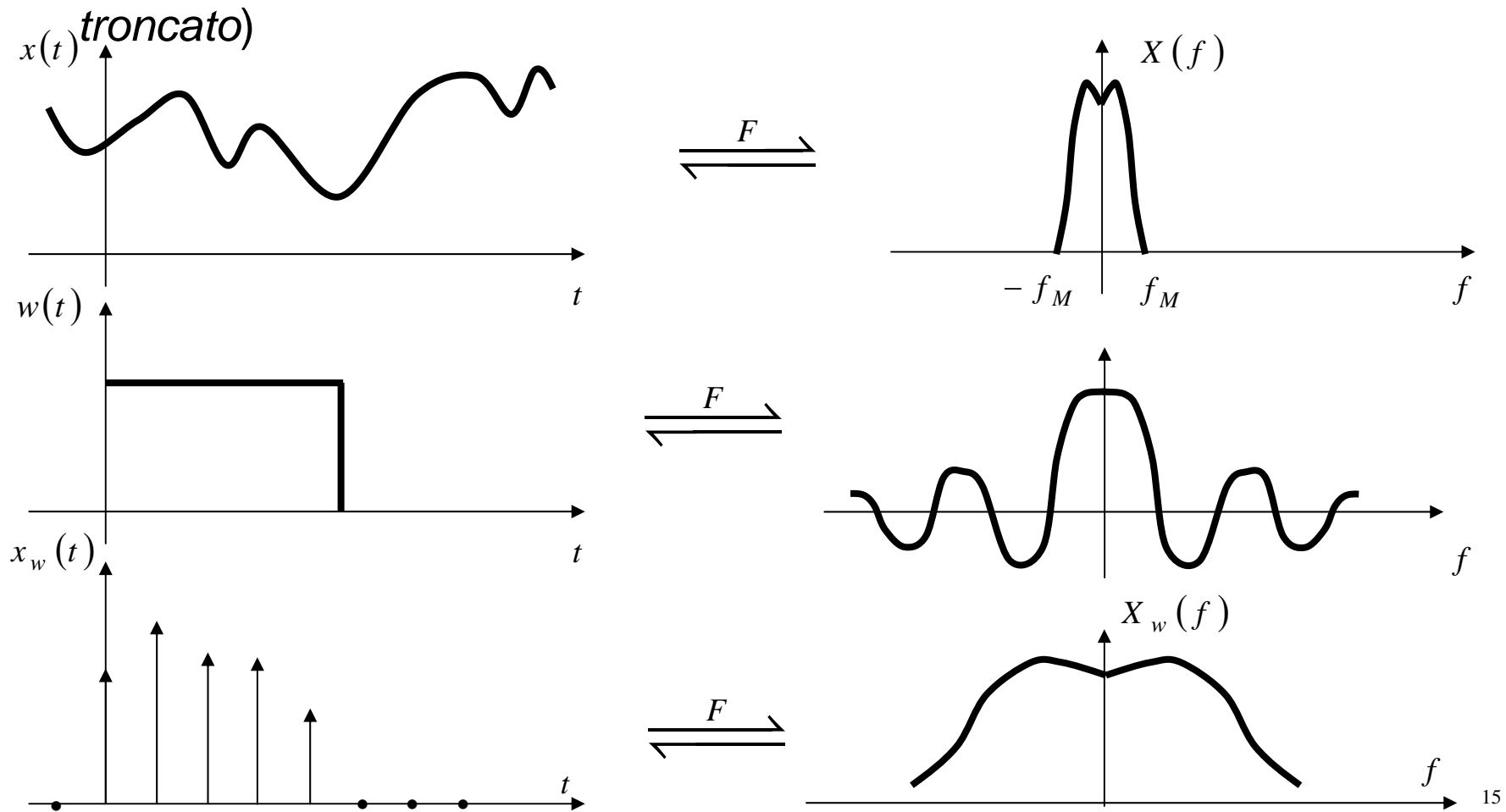


Queste oscillazioni non diminuiscono di ampiezza all'aumentare della durata della finestra, ma si limitano a infittirsi attorno alla discontinuità.

Il problema di trovare una approssimazione del sinc di durata non doppiamente infinita e che produca una buona risposta in frequenza passabasso è il problema del progetto di filtri numerici.

Notiamo che:

- il rispetto del teorema di campionamento permette la “ricostruzione perfetta” del segnale solo a partire da un numero infinito di campioni (interpolazione *sinc* ideale).
- In pratica essa è attuabile solo con una certa approssimazione considerando una versione troncata del segnale di partenza (*sinc* troncato)



In questo caso avremo:

$$x_w(t) = \sum_{k=0}^N x_c(kT_c)w(kT_c) \quad \xLeftrightarrow{F} \quad X_w(\omega) = X_c(\omega) * W(\omega) / 2\pi$$

Questa approssimazione causerà:

- un errore di troncamento nel dominio nel tempo o, equivalentemente, di spectral leakage (dispersione spettrale) nel dominio della frequenza;
- un eventuale errore di aliasing;

Per ridurre questo fenomeno è necessario utilizzare opportune funzioni peso o "finestre"

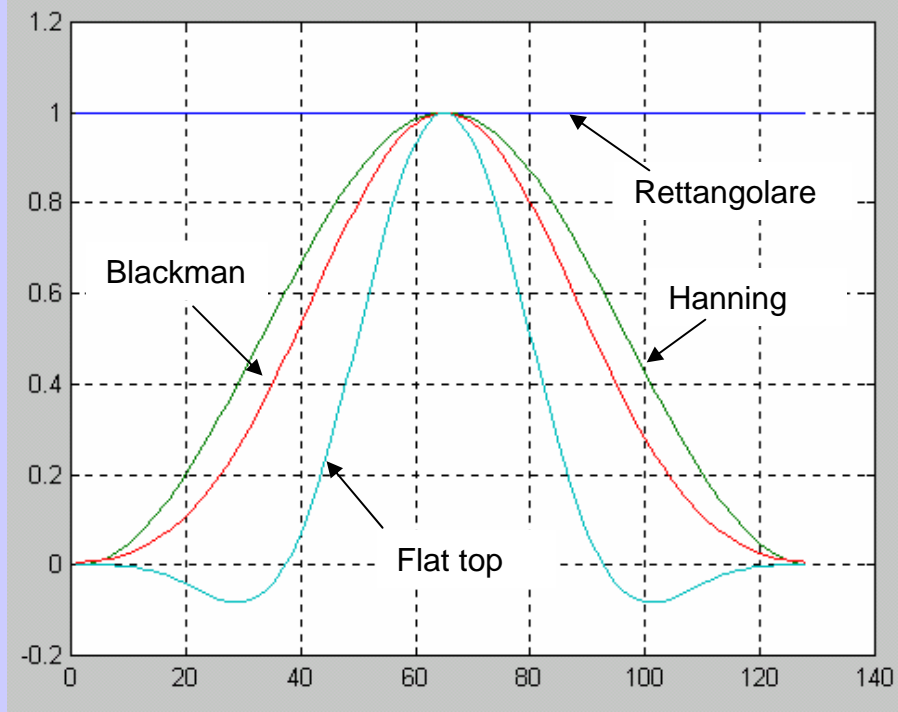
Infatti, a causa del troncamento brusco al termine della finestra di osservazione, il segnale analogico originale viene modificato. Per ridurre tali effetti negativi si può cercare di attenuare le discontinuità introdotte nel segnale utilizzando opportune finestre peso che presentino un andamento più “dolce” agli estremi dell’intervallo di osservazione.

Non esiste la finestra “ideale” perché ogni finestra realizza un compromesso tra due fattori:

- risoluzione in frequenza (*larghezza del lobo principale*).
- dispersione spettrale (*ampiezza dei lobi laterali*).

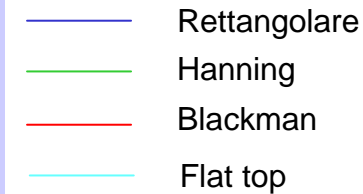
Non si possono minimizzare simultaneamente la larghezza del lobo principale e la ampiezza dei lobi laterali a parità di durata temporale

le principali finestre viste nel dominio del tempo...



$$w(nT_c) = \sum_{l=0}^L (-1)^l a_l \cos\left(\frac{2l\pi n}{N}\right)$$

finestra coseno di ordine L



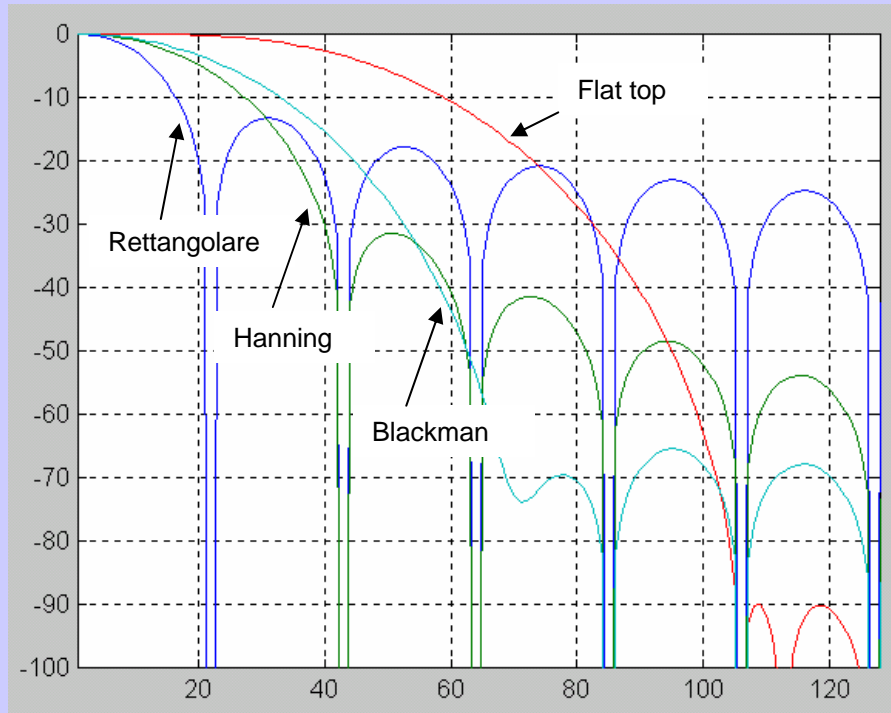
1) $\sum_{l=0}^L a_l = 0$

condizione di normalizzazione

2) $w^{(j)}(\pm N/2) = \sum_{l=0}^L (-1)^l l^j a_l = 0$

continuità agli estremi

... e nel dominio della frequenza



$$W(h\Delta f) = \frac{\delta \sin(\pi\delta)}{\pi a_o} \sum_{l=0}^L (-1)^l \frac{a_l}{h^2 - l^2}$$

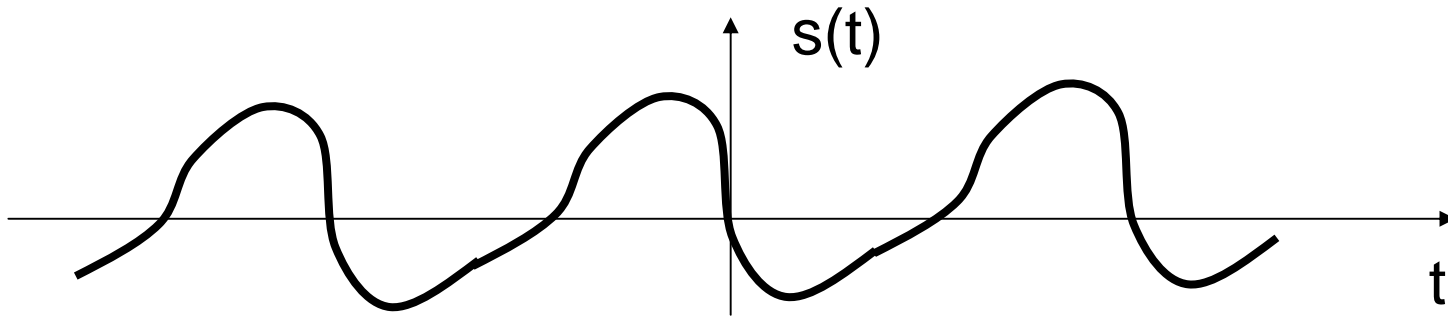
spettro della finestra coseno



1) decadimento asintotico dipendente dall'indice j della derivata annullata

2) risoluzione proporzionale alla banda equivalente della finestra

Consideriamo il caso particolare della stima dello spettro di un segnale periodico. Questo problema è di grande importanza teorica e pratica e in esso rientrano anche i problemi di stima di valore medio e quadratico medio.



Un segnale periodico di banda finita è esprimibile come:

$$x(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega_0 t}$$

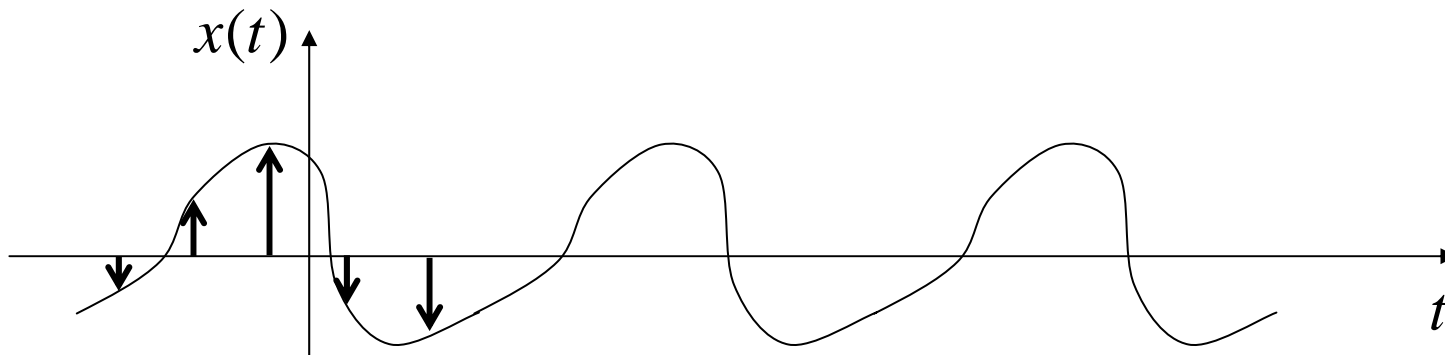
cioè come somma di $n+1$ termini armonici
(spettro con numero finito di righe)

E' evidente che determinare i coefficienti c_k equivale a conoscere "tutto" del segnale.

Si dimostra che i coefficienti c_k sono determinabili esattamente da soli $N > 2n$ campioni del segnale presi con un periodo di campionamento $T_c = T_0 / N$, essendo $T_0 = 2\pi / \omega_0$ il periodo del segnale:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{k=-n}^n x(mT_c) e^{-jk\omega_0 m T_c} \quad \text{trasformata discreta di Fourier (DFT)}$$

Si noti bene che abbiamo un caso di ricostruzione analitica perfetta del segnale nonostante l'uso di una formula discreta e finita al posto di una continua e infinita. Non c'è alcun errore di discretizzazione.



Questo “miracolo” si ha solo in questo caso particolare e si verifica quando la finestra di osservazione è esattamente multipla del periodo del segnale lo spettro del segnale finestrato è immutato in corrispondenza delle componenti armoniche originarie. In caso contrario si genera l'errore di troncamento o di leakage

La condizione qui sopra è quella di campionamento sincronizzato o coerente

Alla fine di tutto si riesce a ricostruire il segnale originario (o il suo spettro, il che è lo stesso) a partire da N campioni.

Riepilogo sul campionamento negli strumenti di misura

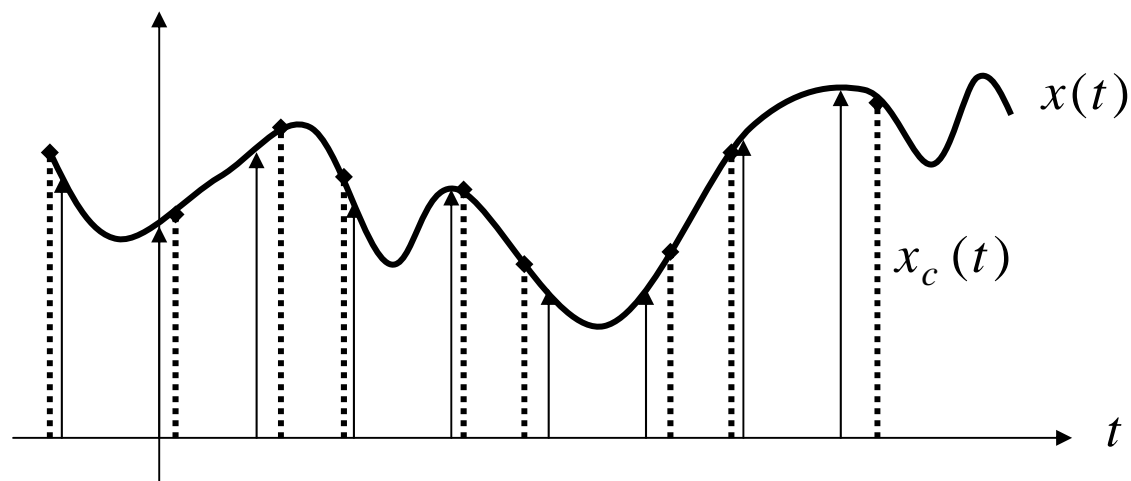
- ▶ campionare significa considerare un segnale analogico in istanti non solo discreti, ma anche in numero finito;
- ▶ la ricostruzione esatta del segnale è quindi teoricamente possibile solo per segnali periodici a banda limitata;
- ▶ in questo caso ricostruire significa calcolare le componenti armoniche (che infatti sono in numero finito);
- ▶ in questo caso, inoltre, la ricostruzione richiede una finestra di osservazione rettangolare di durata opportuna rispetto al periodo del segnale (campionamento coerente);
- ▶ se il campionamento non è coerente, la ricostruzione è affetta da errori che si possono ridurre scegliendo una finestra con caratteristiche spettrali migliori della rettangolare;
- ▶ la scelta della finestra dipende comunque dal tipo di segnale e soprattutto dal parametro da misurare.

- ▶ i segnali aperiodici a banda limitata hanno spettro continuo e quindi non è comunque possibile una ricostruzione esatta come nel caso dei segnali periodici;
- ▶ inoltre se non si dispone dei valori del segnale da $-\infty$ a $+\infty$ (caso tipico), è possibile ottenere lo spettro solo con una certa approssimazione, che è la stessa del caso dei segnali periodici con campionamento non sincronizzato;
- ▶ sono quindi utili in questo caso finestre con caratteristiche spettrali opportune, diverse a seconda del tipo di misura (di frequenza o di ampiezza dello spettro).

Il campionamento reale

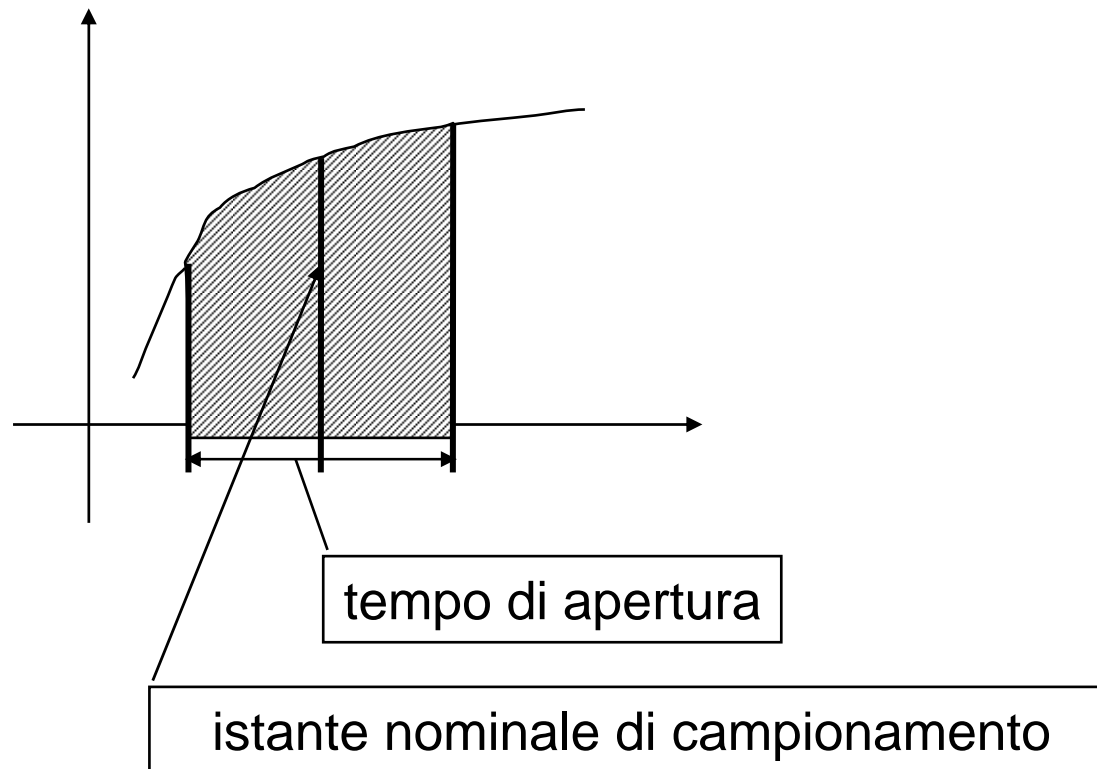
I circuiti di campionamento e tenuta e le basi dei tempi dei sistemi di conversione A/D reali sono affetti da diversi problemi che ne degradano le prestazioni e ne rendono il comportamento significativamente diverso dai corrispondenti elementi ideali.

L'analisi delle non idealità delle basi dei tempi reali è piuttosto complessa, mentre quella dei circuiti di campionamento e tenuta è più semplice

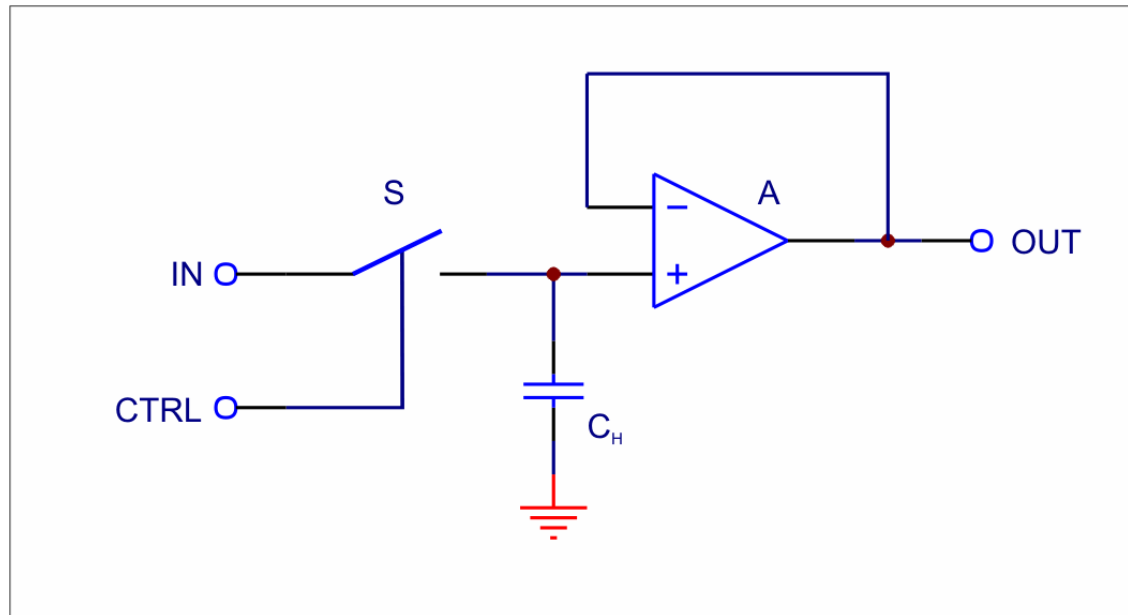


I circuiti di campionamento e tenuta reali hanno un tempo di apertura (*aperture time*) finito, per cui il valore fornito in uscita in realtà non è istantaneo ma dipende dai valori del segnale durante il tempo di apertura (oltre che da tanti altri fattori).

Inoltre esso è anche variabile a causa di effetti dissipativi propri dei circuiti SHA/THA reali.

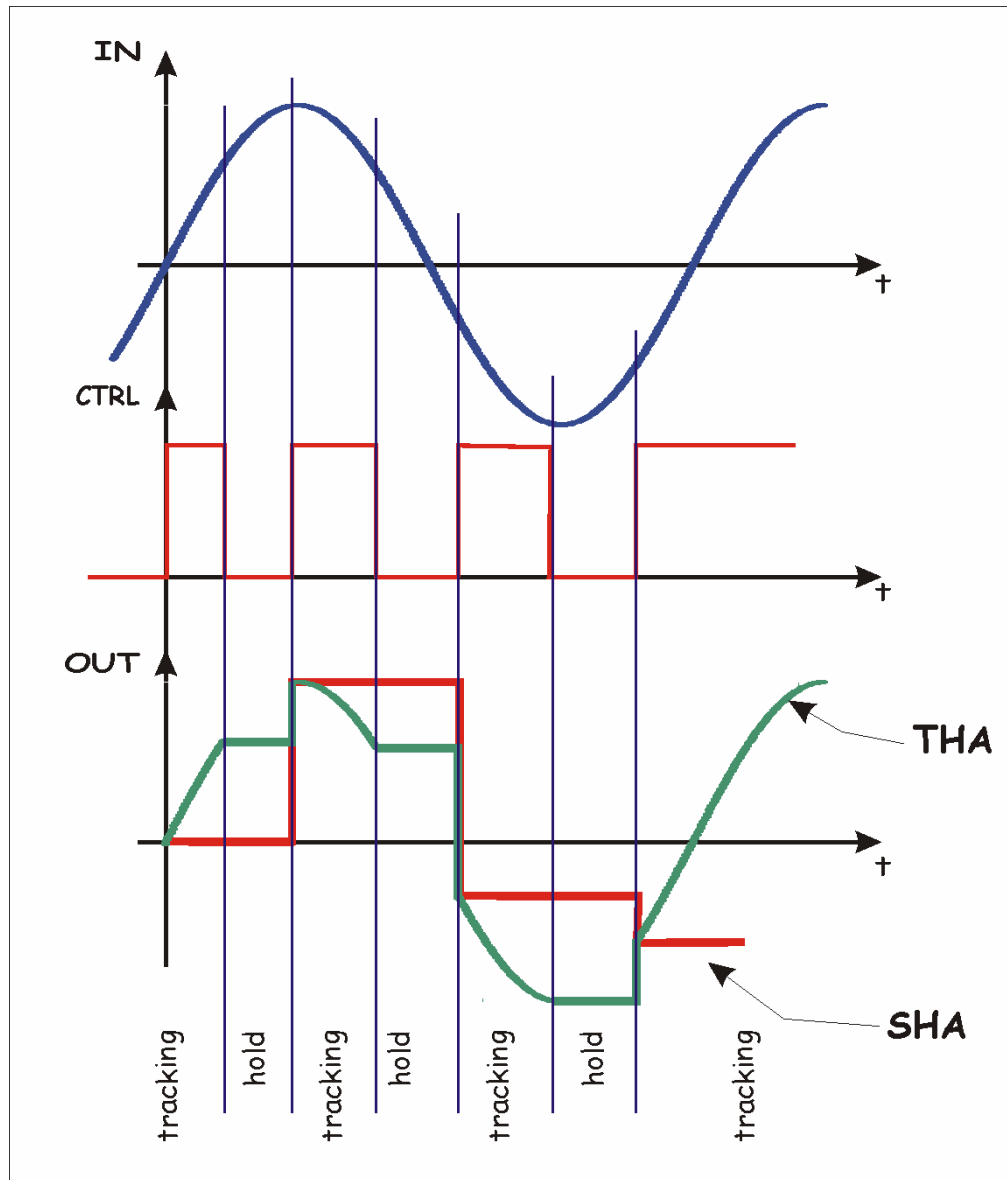


Schema (di principio) di uno SHA/THA...



Se il segnale di controllo è accoppiato ad S in alternata si ha uno SHA, mentre se è accoppiato in continua si ha un THA

... e forme d'onda relative



perché il circuito SHA/THA è indispensabile

supponiamo di applicare un segnale sinusoidale di frequenza f direttamente all'ingresso di un ADC bipolare con risoluzione di N bit e che l'ampiezza di picco del segnale di ingresso sia pari al range dinamico (fondo scala) dell'ADC:

$$V_{IN}(t) = \frac{V_{FSR}}{2} \sin(2\pi ft) = \frac{(2^N - 1)LSB}{2} \sin(2\pi ft)$$

Un segnale sinusoidale assume la massima velocità di variazione in corrispondenza del passaggio per lo zero della forma d'onda:

$$\left. \frac{dV_{IN}(t)}{dt} \right|_{MAX} = \left. \frac{dV_{IN}(t)}{dt} \right|_{V_{IN}(t)=0} = \pi f (2^N - 1) LSB \cdot \cos(2\pi ft) \Big|_{t=0} = \pi f (2^N - 1) LSB$$

quindi se ΔT è il tempo che l'ADC impiega per portare a termine la conversione, la variazione massima del segnale sarà pari a $\Delta V_{IN,MAX} = \pi f (2^N - 1) LSB \cdot \Delta T$; la conversione non sarà corretta se questa variazione supera il valore limite di $\frac{1}{2}$ LSB, quindi se la frequenza del segnale è maggiore di:

$$f_{MAX} = \frac{\Delta V_{IN,MAX}}{\pi (2^N - 1) LSB \Delta T} = \frac{0.5 LSB}{\pi \cdot (2^N - 1) LSB \cdot \Delta T} = \frac{1}{2\pi \cdot (2^N - 1) \cdot \Delta T}$$

Per un ADC a $N=12$ bit e con un tempo di conversione $\Delta T=1\mu s$, la massima frequenza ammessa sarebbe quindi di appena 38.9 Hz, quando il limite teorico previsto dal teorema di Shannon è di ben 500 kHz!

errori della base dei tempi

Se ripetessimo M volte l'acquisizione di record di N campioni a partire da un istante di tempo (nominale) $t_0 = 0$, gli istanti di campionamento effettivi sarebbero sempre diversi tra loro.

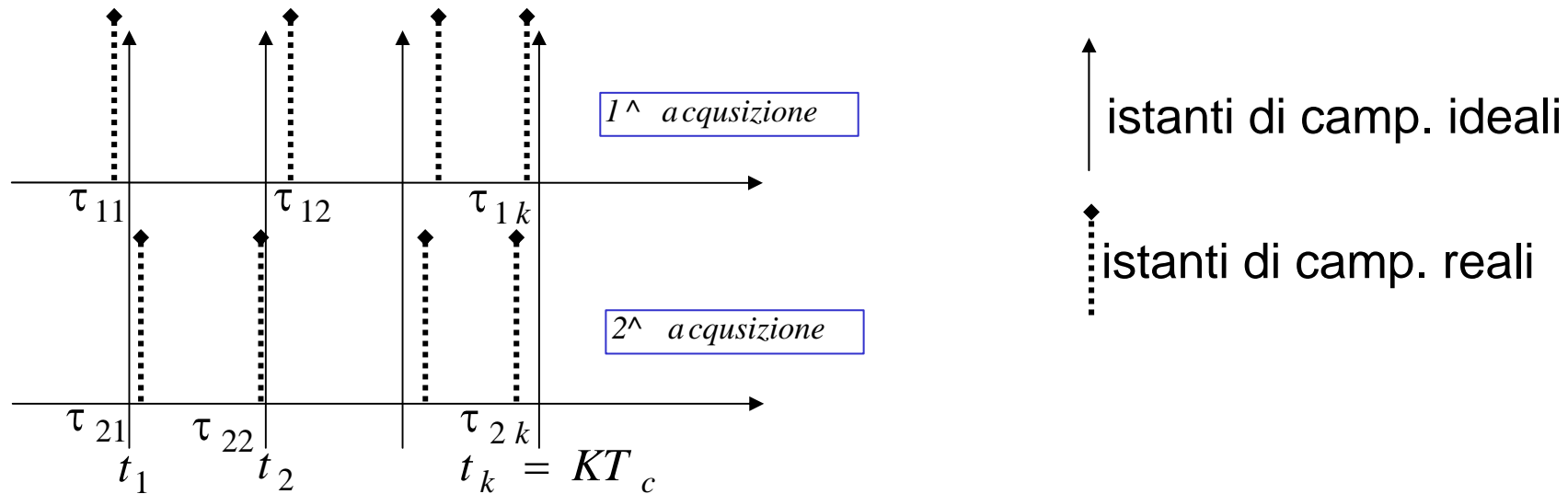
L'errore complessivo sull'istante di campionamento è dato dalla somma di due componenti di natura diversa: una sistematica e una casuale:

$$\tau_{k,i} = t_k + e_{k,i} = t_k + \underbrace{Es_k}_{\text{errore sistematico}} + \underbrace{Ec_{k,i}}_{\text{errore casuale (a media nulla)}}$$

$\tau_{k,i} \equiv$ k-esimo istante di campionamento della i-esima acquisizione
($k=0, 1, \dots, N-1$; $i = 1, 2, \dots, M$)

La presenza della componente di errore casuale impone di considerare la sequenza di impulsi di campionamento restituita dalla base dei tempi come un *processo casuale*.

Ogni sequenza di impulsi di campionamento è una *realizzazione* di tale processo casuale



Il k-esimo istante di campionamento reale τ_k è dunque una variabile aleatoria data dalla somma dell'istante di campionamento ideale e di un termine casuale:

$$\tau_k = E[\tau_{k,i}] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tau_{k,i} = t_k + E_{Sk}$$

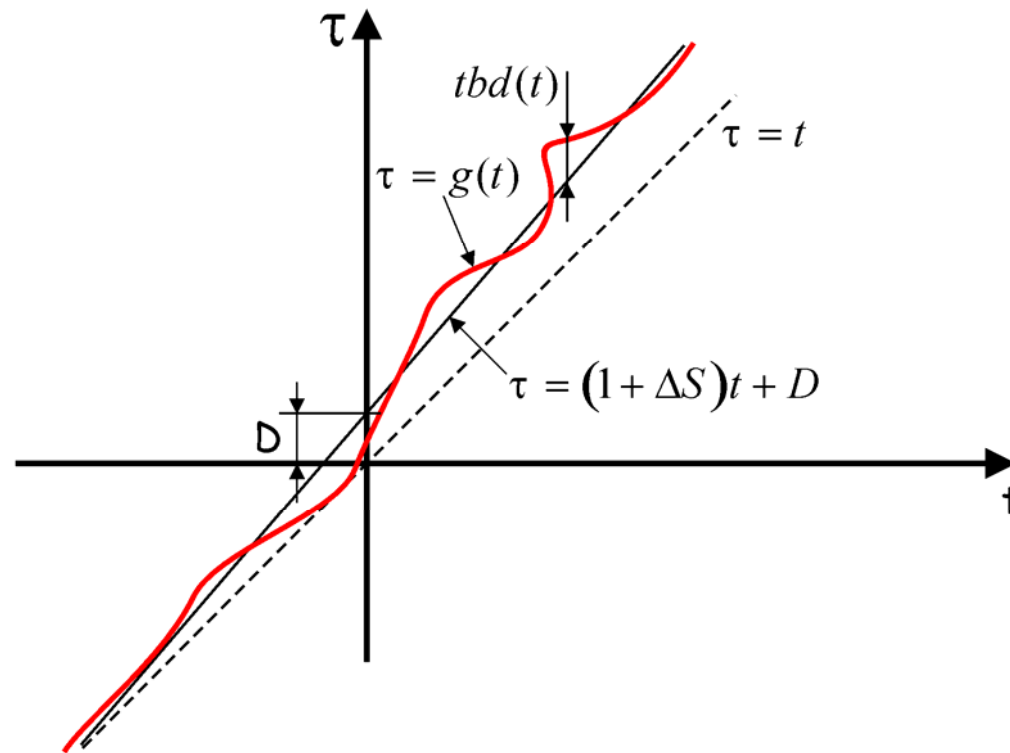
valore atteso o medio degli istanti di campionamento

Naturalmente il fatto che l'errore abbia una componente sistematica è una realtà fisica che non significa assolutamente che questa componente sia nota!

L'errore sistematico E_{Sk} dipende esclusivamente dall'indice k o, se si preferisce, dal corrispondente istante ideale $t_k = kT_c$:

$$\tau_k = g(t_k)$$

$$E_{Sk} = E[\tau_{k,i}] - t_k = \tau_k - t_k = g(t_k) - t_k$$



La curva $g(t)$ è una caratteristica statica non lineare che approssima la “retta teorica” $\tau = t$

Il modo standard per descrivere un errore sistematico statico consiste nel decomporlo in *errore di guadagno*, *errore di offset* ed *errore di linearità*.

$$\tau_k = g(t_k) = (1 + \Delta S)t_k + D + tbd(t_k) \quad \Longrightarrow \quad E_{Sk} = \tau_k - t_k = \Delta S \cdot t_k + D + tbd(t_k)$$

$\Delta S \equiv$ *sweep speed error* (errore della velocità di spazzolamento)

$D \equiv$ *trigger delay error* (errore di ritardo del trigger)

$tbd \equiv$ *timebase distortion error* (errore di distorsione della base tempi)

E' bene osservare che:

- ▶ Queste quantità sono effettivamente errori (non incertezze);
- ▶ Se gli errori fossero noti (ricavati, ad esempio, da un'operazione di calibrazione della base dei tempi) l'errore sistematico di campionamento può essere in teoria totalmente rimosso mediante opportuna correzione digitale;

Normalmente di uno strumento non conosciamo gli errori ma maggiorazioni dei loro valori assoluti (fornite dalla casa costruttrice).

*Queste maggiorazioni sono dette **incertezze***

$|\Delta S| < U_S$ incertezza di velocità di sweep

$|D| < U_D$ incertezza di ritardo del trigger

$|tbd(t)| < U_{TBD}$ incertezza di distorsione della base dei tempi

Questi valori possono essere forniti in tutto, in parte o per niente, e in varie forme più o meno chiare e più o meno esplicite. Spesso è fornita solo U_S , considerando U_D irrilevante e U_{TBD} trascurabile.

L'errore casuale di campionamento è comunemente espresso come somma di uno jitter del trigger Jt_i e di uno jitter di campionamento $Nt_{k,i}$ (o rumore di fase o incertezza di apertura).

- lo jitter del trigger è il valore atteso dell'errore casuale ed è un processo stazionario a media nulla:

$$Jt_i \stackrel{def}{=} E[E_{Ck,i}] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_{Ck,i}$$

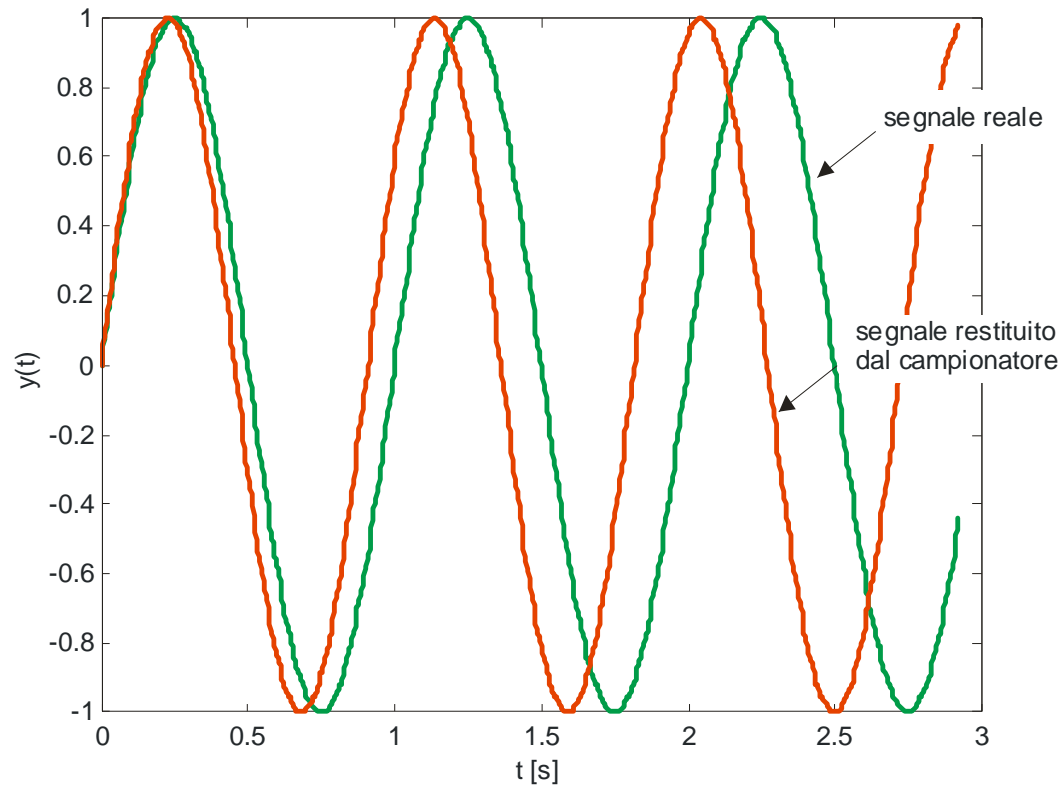
- il rumore di fase è invece un processo casuale stazionario ed ergodico a media nulla, di solito gaussiano bianco:

$$Nt_{k,i} = E_{Ck} - Jt_i$$

Il processo di campionamento reale, in parole povere, può essere descritto come segue:

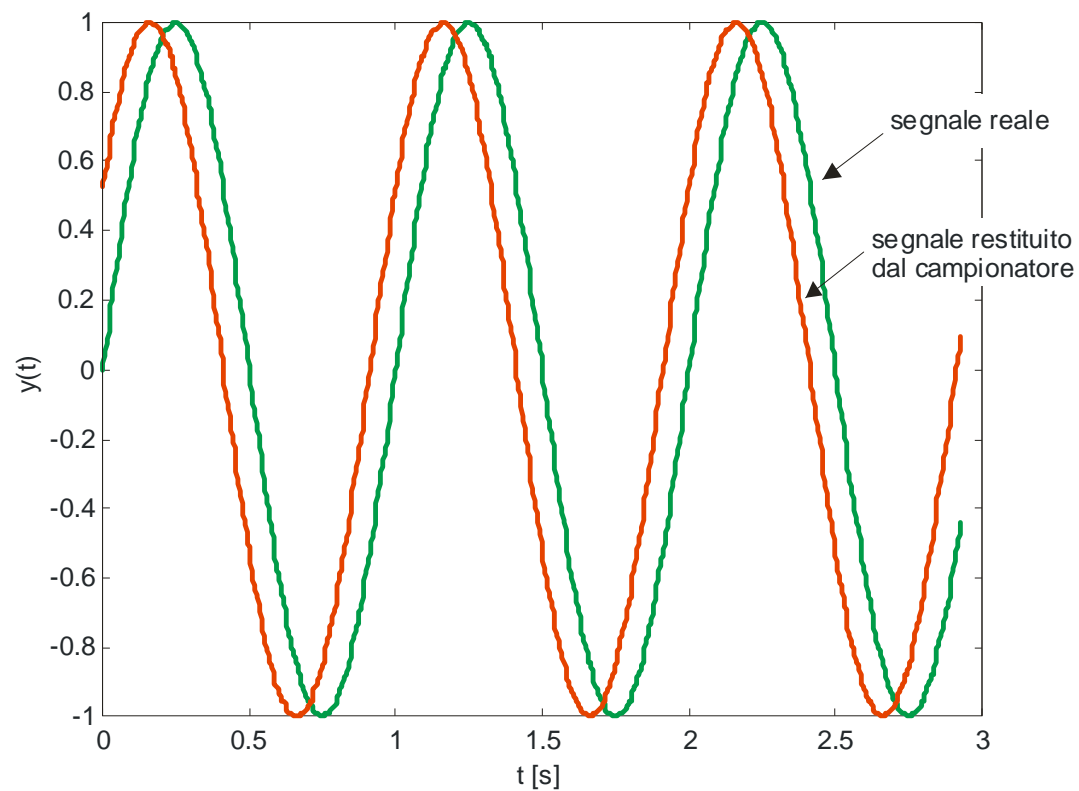
- 1) dovrebbe partire esattamente all'istante di trigger ($t_0 = 0$), ma parte (sistematicamente) con un certo ritardo (effetto di D);
- 2) la frequenza di campionamento è leggermente diversa da quella nominale (effetto di ΔS);
- 3) gli intervalli di campionamento possono essere diseguali tra loro secondo una sequenza che si ripete sempre uguale in ogni acquisizione (effetto di $tbd(t)$);
- 4) il ritardo con cui parte il campionamento non è realmente fisso, ma varia leggermente (casualmente) attorno a D tra un'acquisizione e un'altra (effetto di Jt_i);
- 5) infine (come non bastasse...) gli istanti di campionamento effettivi presentano una ulteriore variazione completamente casuale (effetto di $Nt_{k,i}$).

effetto dello sweep speed error (caso in cui $\Delta S > 0$)



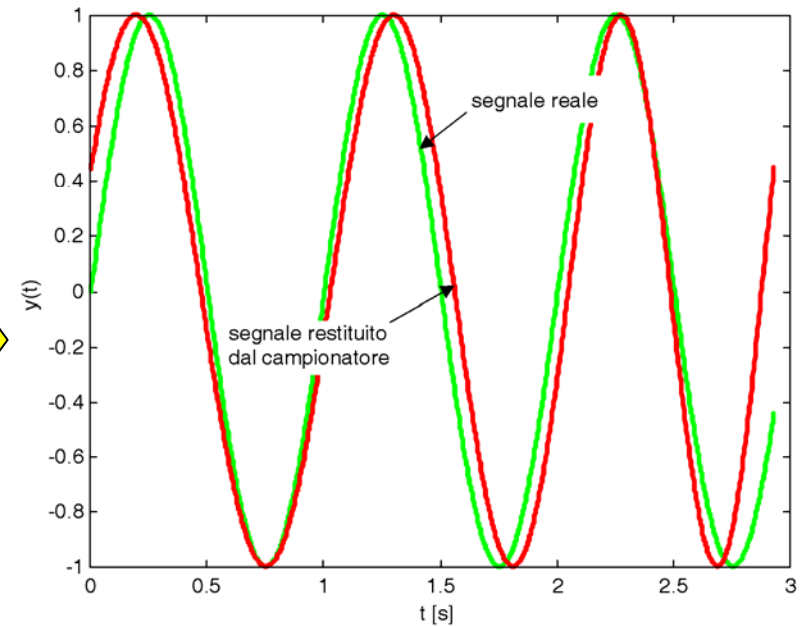
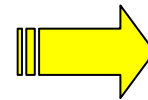
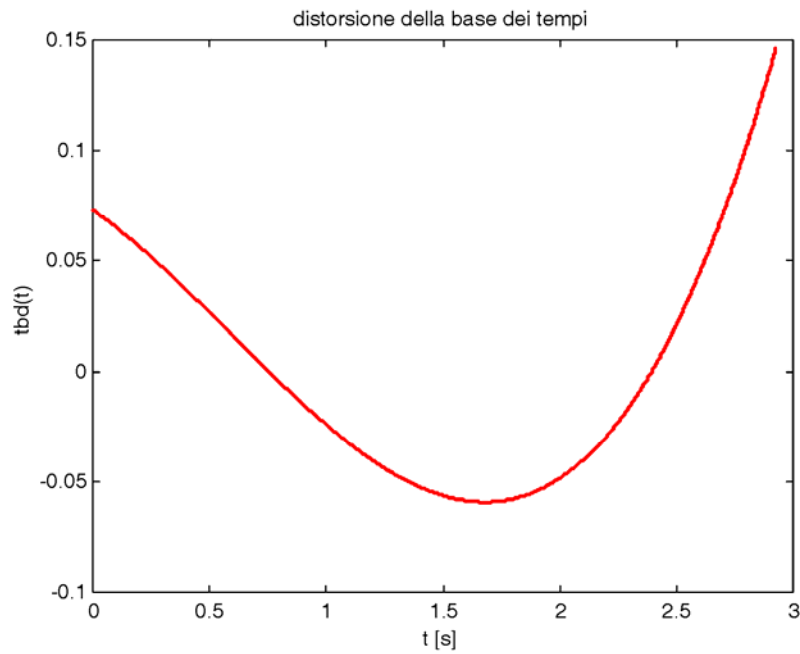
Lo *sweep speed error* causa errori di stima della frequenza del segnale; per $\Delta S > 0$ la frequenza del segnale digitalizzato appare maggiore di quella reale

effetto dell'errore di ritardo del trigger (D)



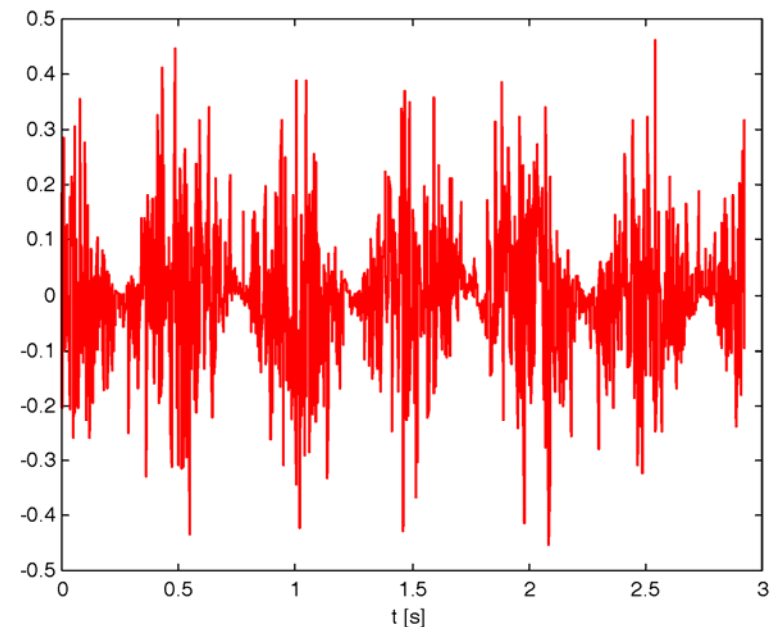
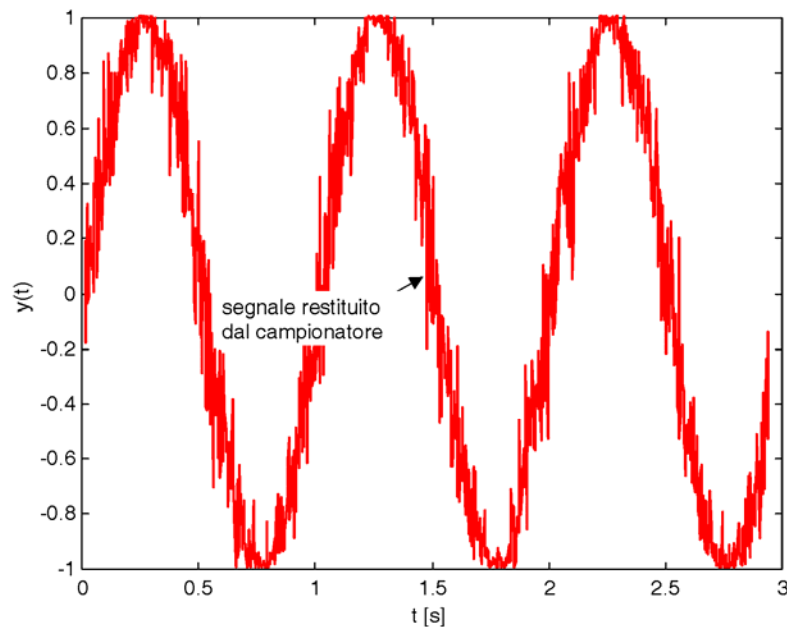
il ritardo sistematico del trigger causa una distorsione di fase lineare

effetto della distorsione della base dei tempi



il termine $tbd(t)$ provoca una modulazione di frequenza locale del segnale campionato; l'errore di frequenza è mediamente nullo.

effetto di un rumore di fase di varianza $25T_C^2$



differenza tra sequenza ideale e sequenza reale

Il rumore di fase causa un errore che somiglia ad un rumore d'ampiezza ma che è funzione della derivata prima del segnale: nei tratti a pendenza elevata l'errore è maggiore che nei tratti a pendenza ridotta.

In definitiva gli istanti di campionamento reali sono legati agli istanti di campionamento ideali dalla relazione:

$$\tau_{k,i} = (1 + \Delta S) \cdot t_k + D + tbd(t_k) + Jt_i + Nt_{k,i}$$

e quindi

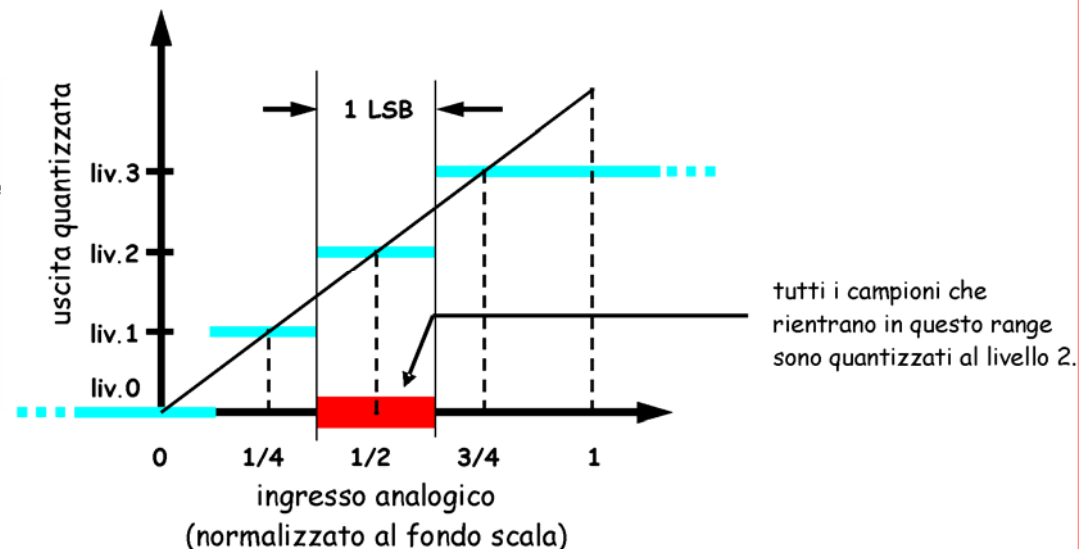
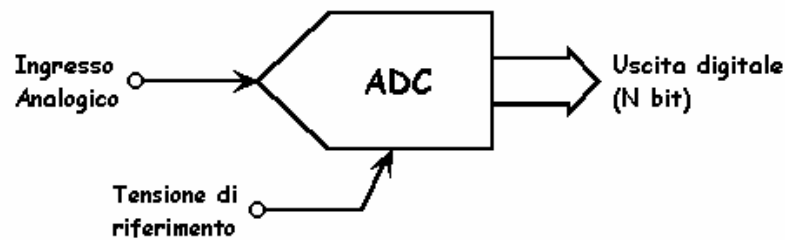
il campionamento reale equivale a un campionamento ideale eseguito su un segnale con la base dei tempi deformata

e

per determinare l'incertezza da cui è affetta una qualunque misura è necessario, a rigore, conoscere le quantità: U_S , U_D , U_{TBD} , σ_{nt}^2 , σ_{jt}^2

Quantizzazione ideale

La **quantizzazione** è l'operazione di approssimazione di ogni valore campionato $x_c[k]$ ad un multiplo intero di una quantità base detta **passo di quantizzazione**, che indicheremo con Q



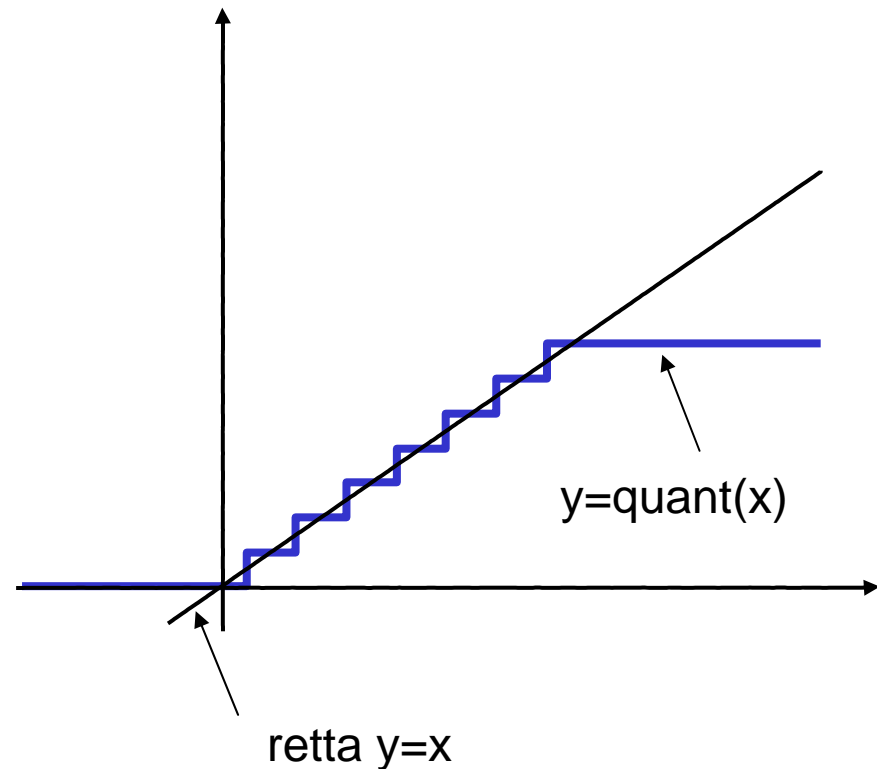
*E' evidente che la quantizzazione comporta una perdita di informazione, che determina un errore di quantizzazione, quindi anche una associata **incertezza di quantizzazione**.*

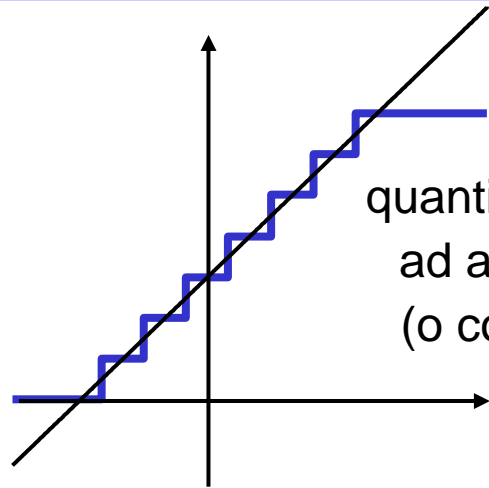
In generale ci sono due modi di produrre la discretizzazione delle ampiezze:

- ad arrotondamento: ogni valore campionato $x_c[k]$ è arrotondato al valore multiplo intero di Q più prossimo per eccesso o per difetto;
- a troncamento: ogni valore campionato $x_c[k]$ è troncato al multiplo intero di Q più vicino per difetto;

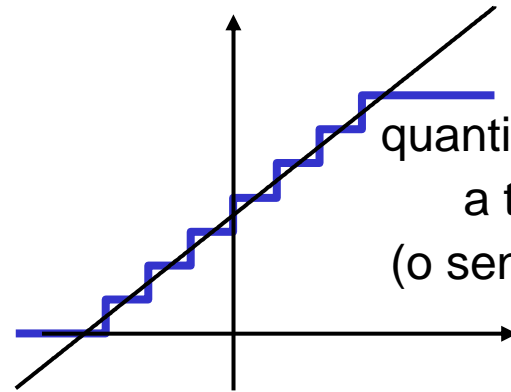
Negli strumenti di misura e nei sistemi di digitalizzazione dei segnali di uso generale è universalmente usata la quantizzazione uniforme ad arrotondamento

L'alternativa è la quantizzazione non uniforme (valori di uscita non equispaziati e bin disuguali). Essa si usa per minimizzare l'errore quando la distribuzione del segnale è nota a priori (ad es. in telefonia).

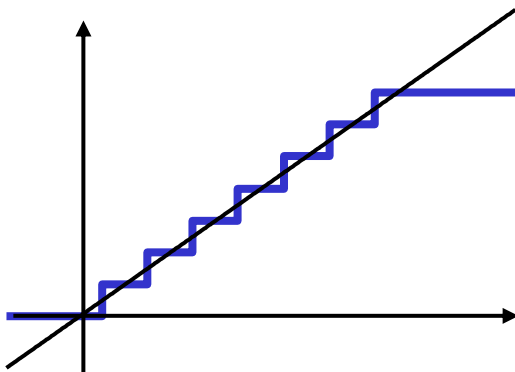




quantizzatore bipolare
ad arrotondamento
(o con zona morta)



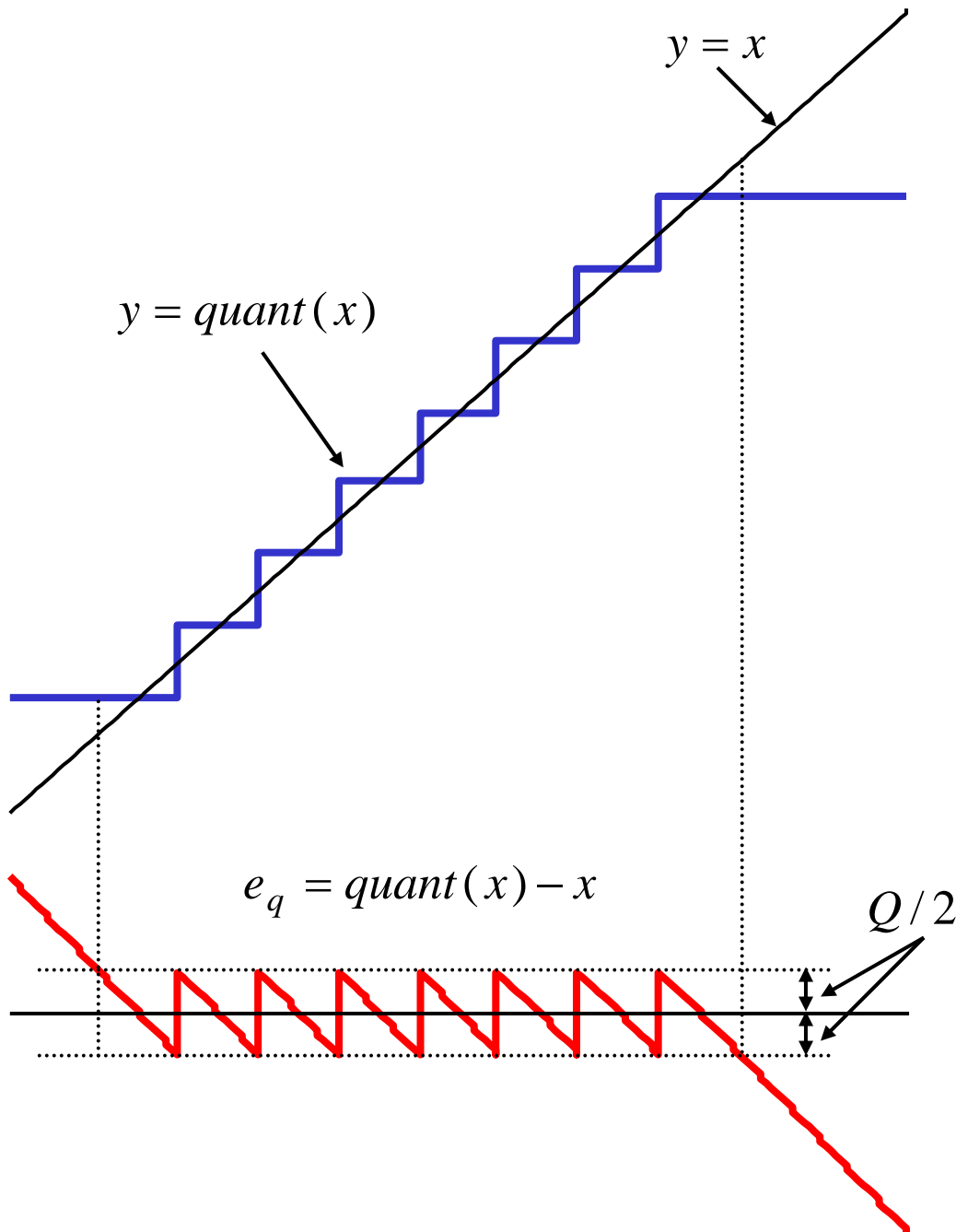
quantizzatore bipolare
a troncamento
(o senza zona morta)



quantizzatore
unipolare

La *quantizzazione ad arrotondamento* è definita dalla posizione dell'origine degli assi sulla retta $y=x$

Per ottenere la caratteristica di un *quantizzatore a troncamento* occorre traslare a destra di $Q/2$



L'errore di quantizzazione ha un'andamento caratteristico a dente di sega.

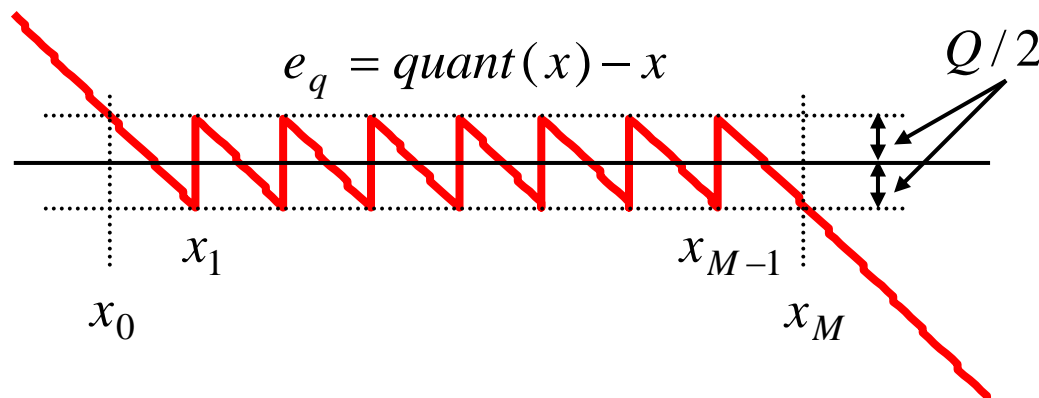
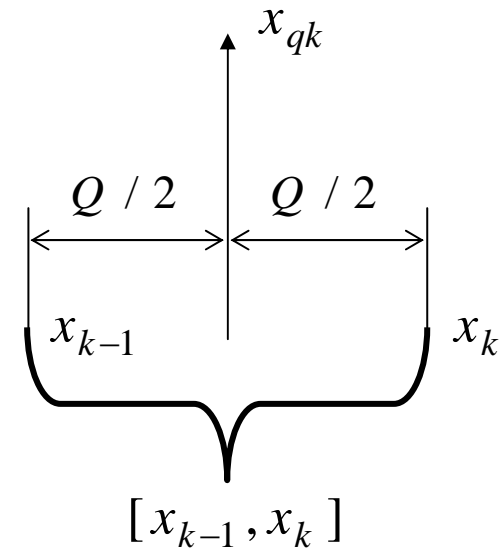
La regione in cui esso ha modulo minore di $Q/2$ definisce il range utile della quantizzazione.

Al di fuori iniziano le zone di saturazione.

Nel caso di *quantizzatore a troncamento* la regione va da 0 a Q

x_{qk}	$(k = 1 : M)$	k -mo livello di uscita
x_k	$(k = 0 : M)$	k -mo livello di soglia
$[x_{k-1}, x_k[$	$(k = 1 : M)$	k -mo bin

Con gli indici da 1 a M-1 indichiamo i livelli di soglia reali (corrispondenti a una reale transizione in uscita). Con gli indici 0 e M indichiamo invece due livelli "fittizi" che delimitano il range utile (quello in cui il modulo dell'errore è $< Q/2$)



Alcune semplici relazioni per un ADC modulo M:

$$x_k - x_{k-1} = Q$$

$$x_{qk} - x_{qk-1} = Q$$

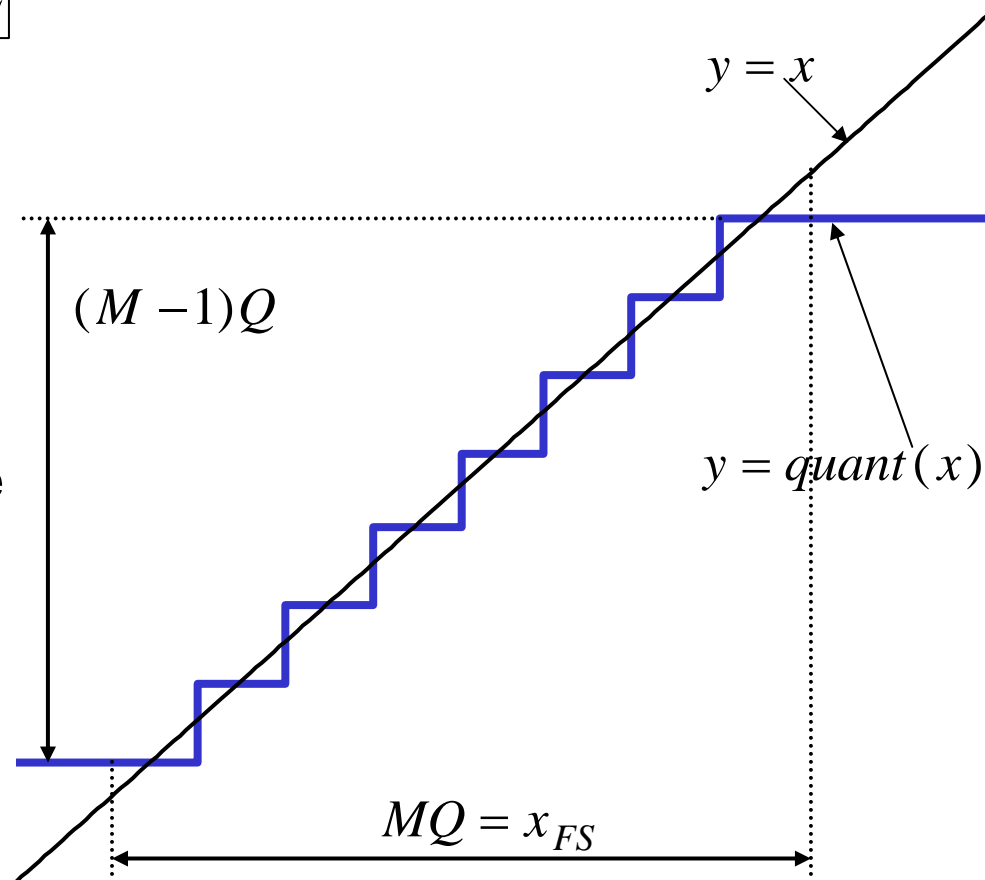
$$x_M - x_0 = MQ$$

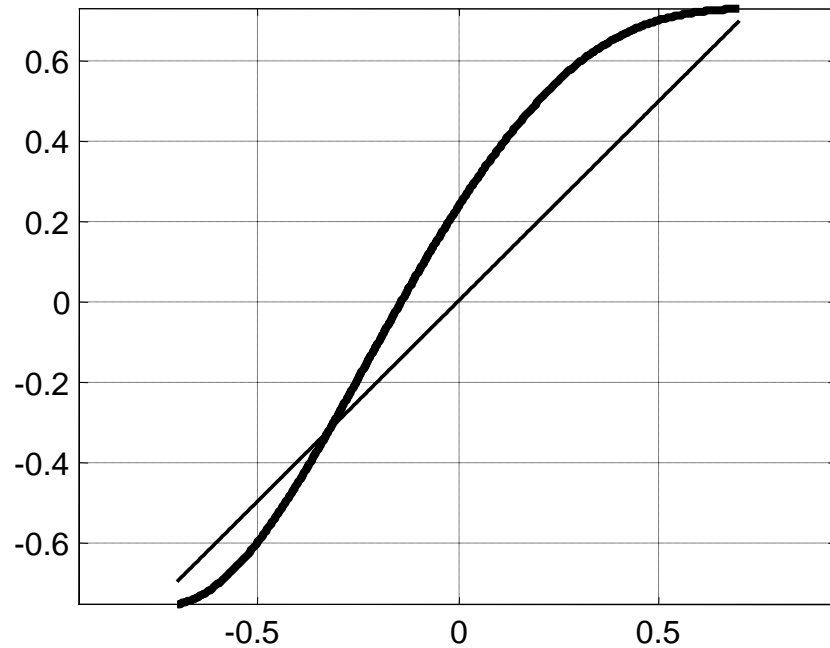
$$x_{qM} - x_{q1} = (M - 1)Q$$

$$|e_q(x)| = |quant(x) - x| \leq Q/2$$

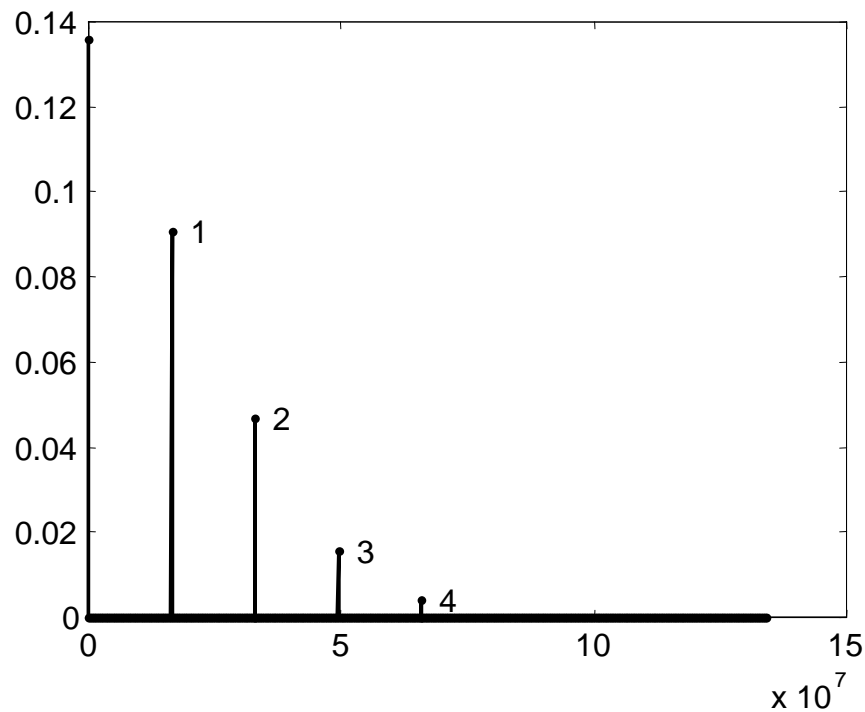
L'errore di quantizzazione necessita un esame più approfondito.

Come cambia un segnale che viene quantizzato?





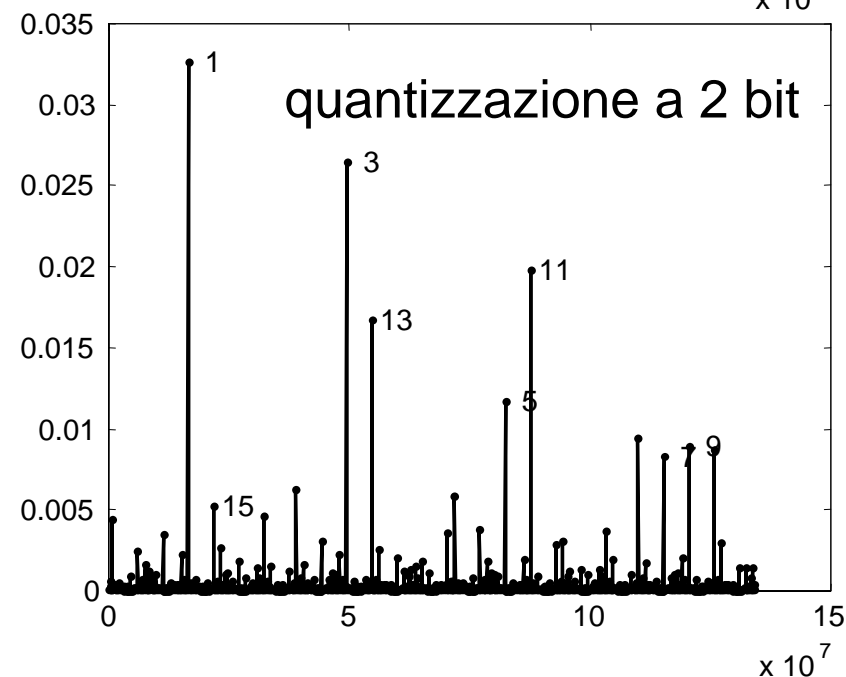
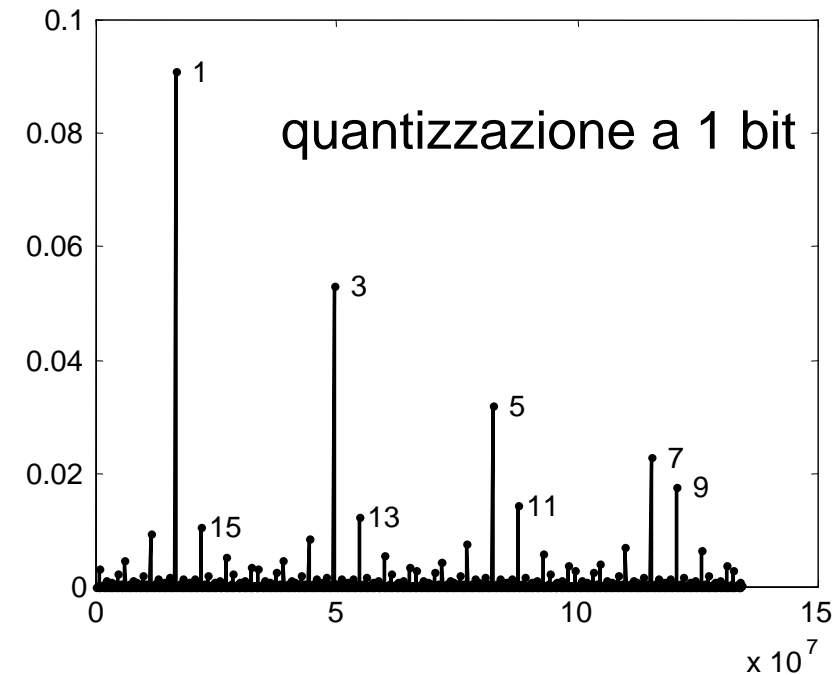
A rigore la quantizzazione è una distorsione non lineare del segnale, e l'errore di quantizzazione è di tipo sistematico (è determinato univocamente dal valore dell'ingresso).

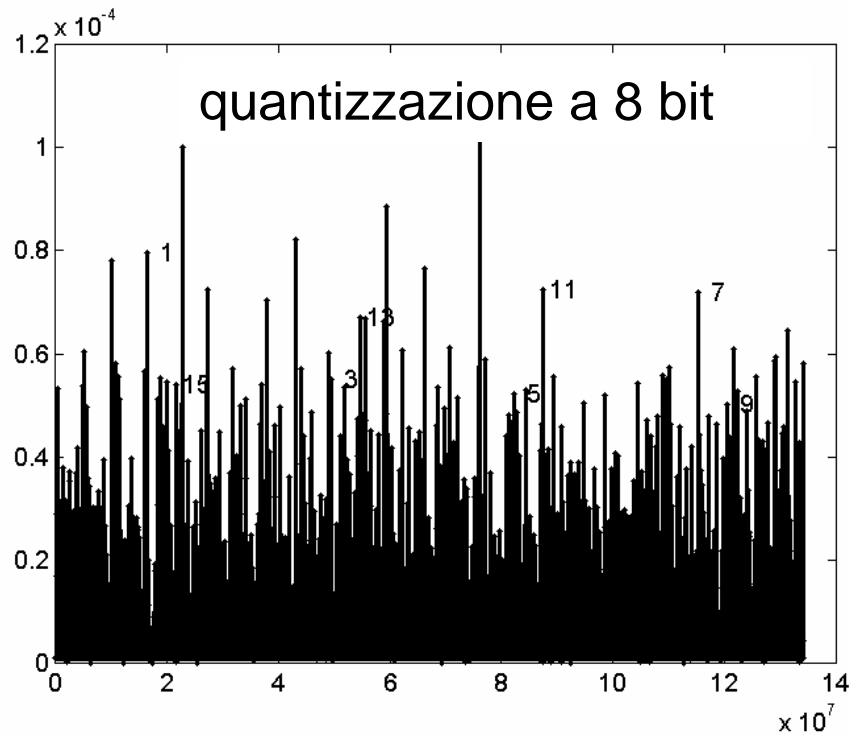


L'effetto di una distorsione non lineare è in generale la comparsa di armoniche spurie. Quando la distorsione è “dolce” (caso tipico) queste armoniche sono in numero limitato, con un effetto caratteristico sullo spettro.

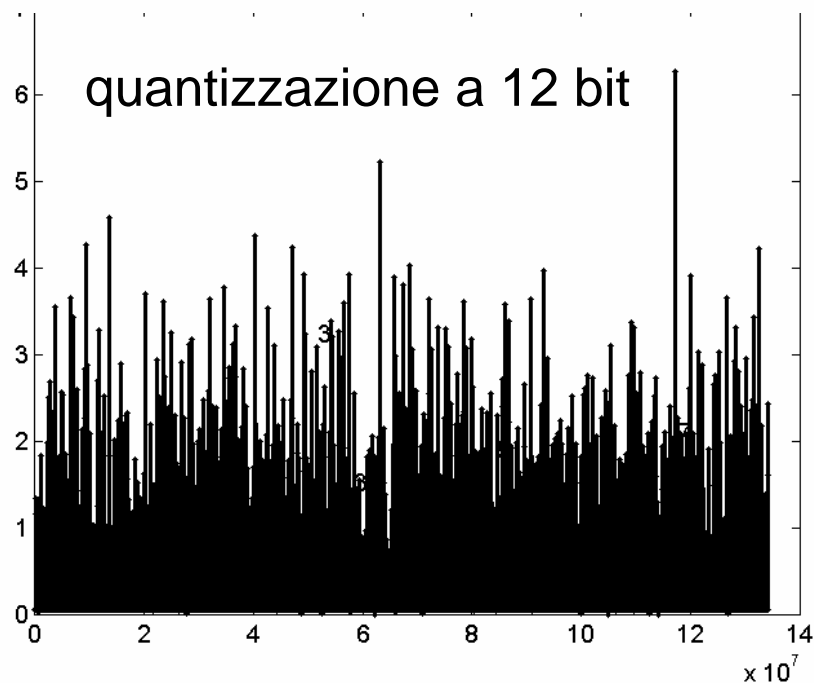
La quantizzazione è però una distorsione con derivata prima discontinua e “granulare” (con centinaia o migliaia di discontinuità). Ciò comporta la comparsa di un enorme numero di armoniche di ampiezza simile che, per il fenomeno dell’*aliasing*, riempiono l’intera banda delimitata dalla frequenza di folding.

Quando la risoluzione è estremamente bassa, le armoniche risultano ancora distinguibili.





Quando la risoluzione è invece su valori normali (8 bit o più) le armoniche si sovrappongono al punto di creare un “tappeto di rumore” omogeneo. Questo errore ha caratteristiche spettrali del tutto analoghe al rumore e si parla perciò di rumore di quantizzazione.

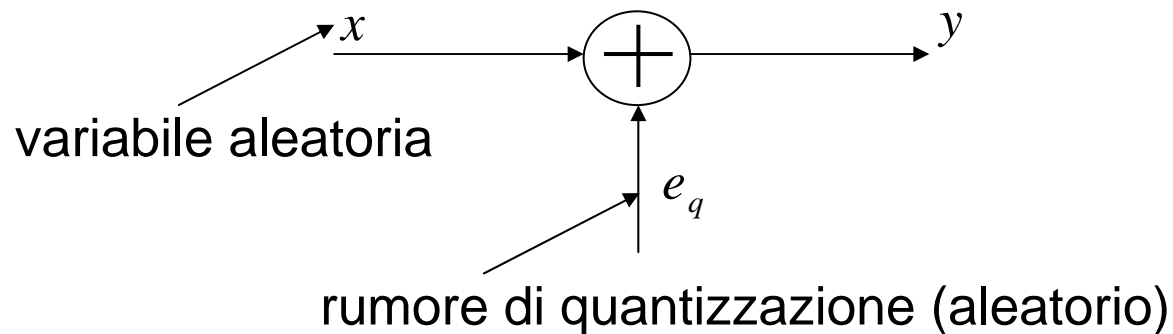


Quando si ha a che fare con del rumore occorre chiedersi:

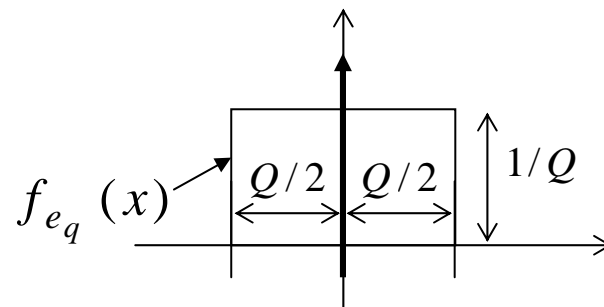
- 1) qual è la densità di probabilità (con media e varianza)?
- 2) qual è la densità spettrale di potenza?

A queste domande dà una risposta rigorosa la **teoria della quantizzazione**

Questa teoria considera l'ingresso (e conseguentemente uscita e rumore di quantizzazione) come variabili aleatorie (o processi casuali).



Nel caso di ingresso x a distribuzione uniforme nel range utile del quantizzatore il rumore ha distribuzione uniforme in $[-Q/2, Q/2[$, e ha quindi media nulla e varianza (potenza) $\sigma_{e_q}^2 = Q^2 / 12$



Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza del rumore, se l'ingresso (sempre supposto a distribuzione uniforme) è bianco (spettro costante fino alla frequenza di folding), è bianco anche il rumore di quantizzazione, che risulta anche incorrelato con l'ingresso.

Il caso appena esaminato non è certamente l'unico in cui si ha rumore di quantizzazione a distribuzione uniforme e con spettro costante. Senza entrare nei dettagli della teoria della quantizzazione, è possibile affermare quanto segue:

qualunque ingresso che vari con ragionevole velocità, coprendo almeno alcuni bin di quantizzazione, dà luogo a un rumore di quantizzazione che risulta, con ottima approssimazione, a distribuzione uniforme, bianco e incorrelato con l'ingresso

E' opportuno notare che per un ingresso sinusoidale che stimoli a piena scala il quantizzatore valgono le relazioni:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{X_{FS}}{2} \right)^2 \quad \text{potenza del segnale}$$

$$\sigma_{e_q}^2 = \frac{Q^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{X_{FS}}{2^N} \right)^2 \quad \text{varianza del rumore di quantizzazione (uniforme)}$$

Il rapporto segnale-rumore massimo, che coincide con il range dinamico (DR) dell'ADC espresso in dB, è dato da:

$$SNR_{MAX} \equiv DR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{V_{FSR}}{2} \right)^2}{\frac{1}{12} \left(\frac{V_{FSR}}{2^N} \right)^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{3}{2} \cdot 2^{2N} \right) = 6.02 \cdot N + 1.76 [dB]$$

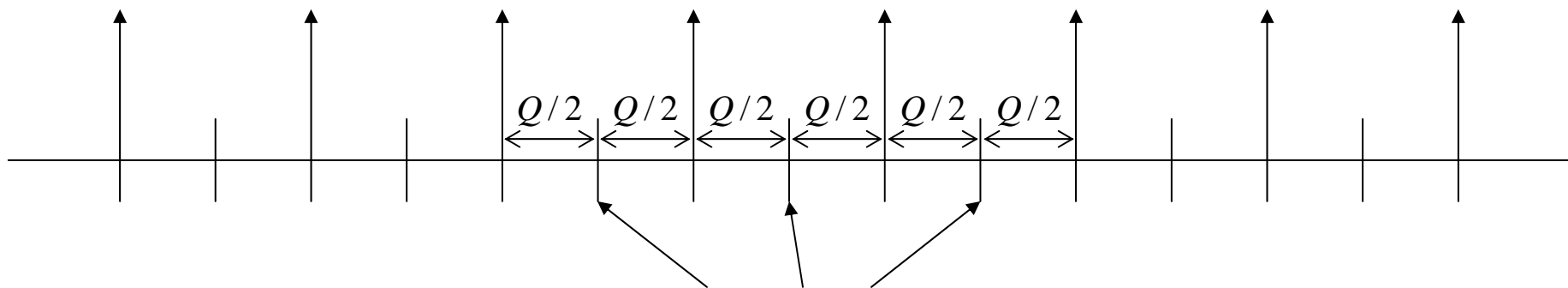
Questa relazione consente di ricavare la risoluzione dell'ADC a partire dallo SNR massimo e ci consentirà di ottenere anche un fondamentale parametro degli ADC reali: l'ENOB (Effective Number Of Bits)

Quantizzazione Reale

La quantizzazione reale in uno strumento digitale (come il campionamento) si discosta dall'idealità ed introduce degli errori aggiuntivi oltre a quello, inevitabile, di quantizzazione

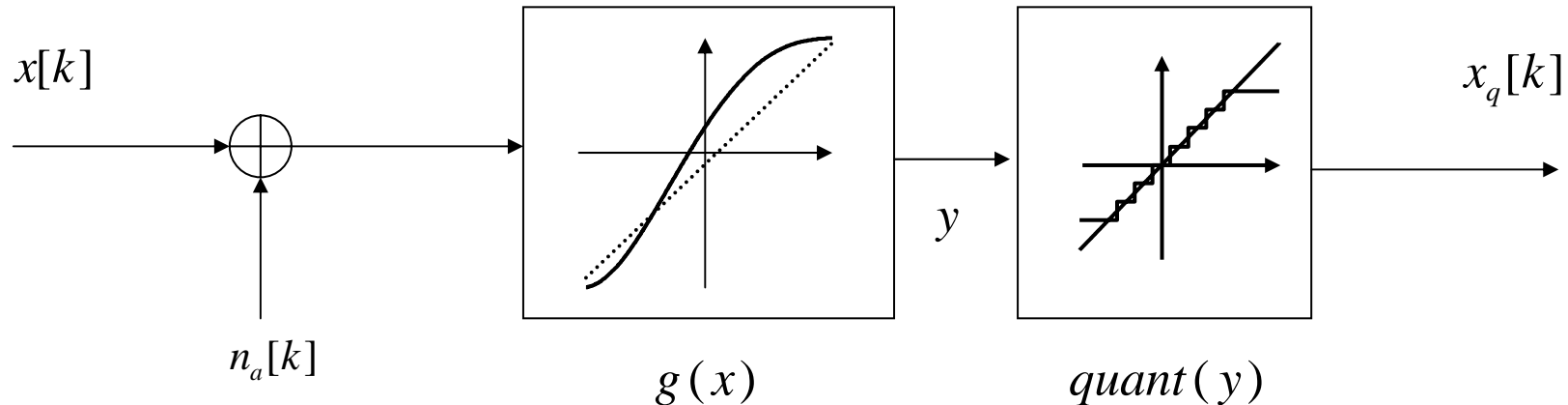
Con questo si intende dire che:

i livelli di soglia presentano scostamenti sistematici e scostamenti casuali dalle loro posizioni ideali; i livelli di uscita, invece, sono sempre nella posizione ideale in quanto digitali



i livelli di soglia non sono nella loro posizione ideale e cambiano posizione a ogni campione

Un modello sufficientemente di un quantizzatore reale accurato è il seguente:



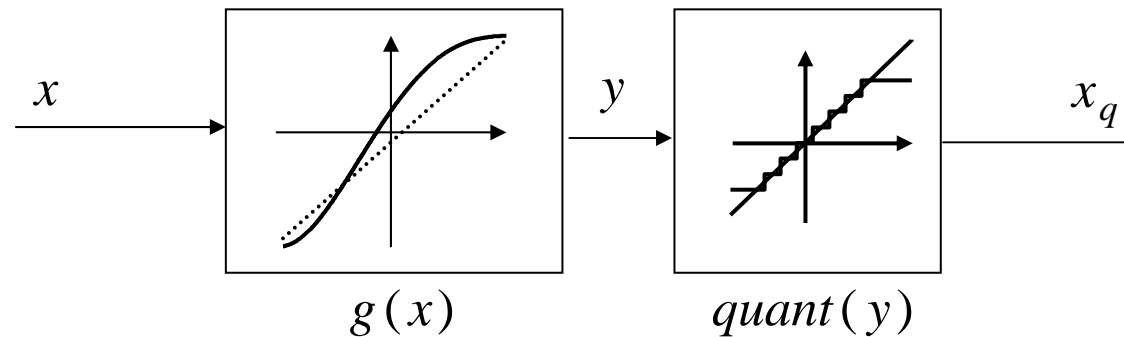
ossia i livelli di soglia si trovano mediamente in posizione diversa da quella ideale a causa della distorsione non lineare e, per di più, cambiano leggermente istante per istante a causa del rumore $n_a[k]$.

La trasformazione subita dal segnale nella quantizzazione reale è pertanto equivalente all'aggiunta di rumore gaussiano bianco (di solito di origine termica), seguita da una caratteristica statica non lineare $g(x)$, e quindi dalla quantizzazione ideale $quant(x)$.

Note

- *E' bene sottolineare che questo è un modello i cui blocchi non devono essere confusi con sottosistemi simili in un ADC reale*
- Il generatore di rumore “equivalente” in ingresso tiene conto di tutti gli errori di ampiezza aleatori, compresi quelli provenienti da eventuali stadi di pre-elaborazione analogica di ingresso
- Il blocco $g(x)$ tiene conto, analogamente, di tutti gli errori di ampiezza sistematici, comprendendo sia le nonlinearità intrinseche dell'ADC, sia quelle di eventuali stadi amplificatori, filtri attivi, ecc.
- *In generale, in un sistema reale non si può rintracciare un blocco fisico corrispondente al quantizzatore “ideale”*

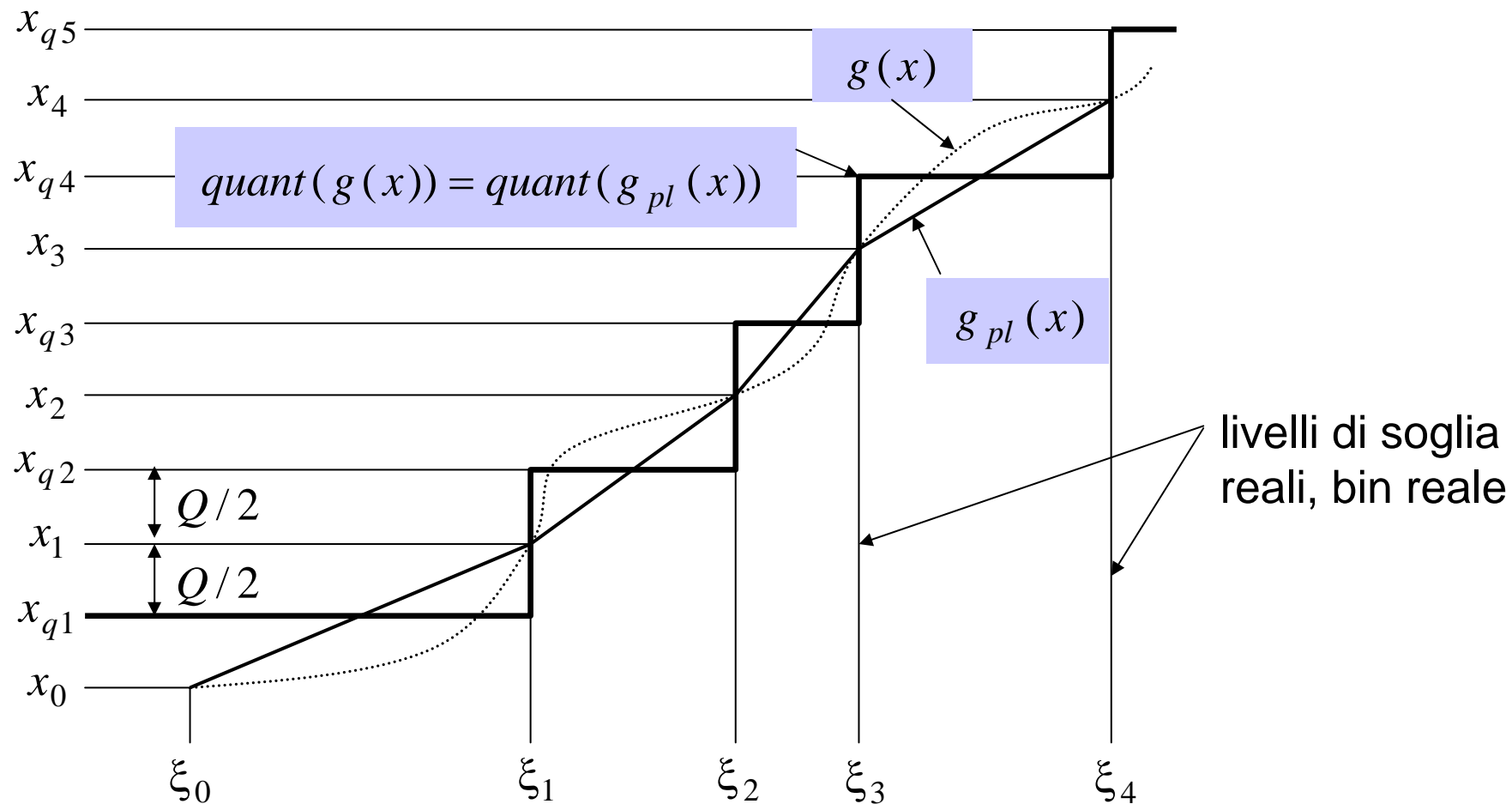
Analisi degli errori sistematici



Questo sistema è un “quantizzatore uniforme non lineare”, in cui i livelli di uscita sono equispaziati (ideali) ma i livelli di soglia invece di essere x_k (ideali) sono:

$$\xi_k = g^{-1}(x_k)$$

Vediamo come si presenta, di conseguenza, la caratteristica di quantizzazione reale.

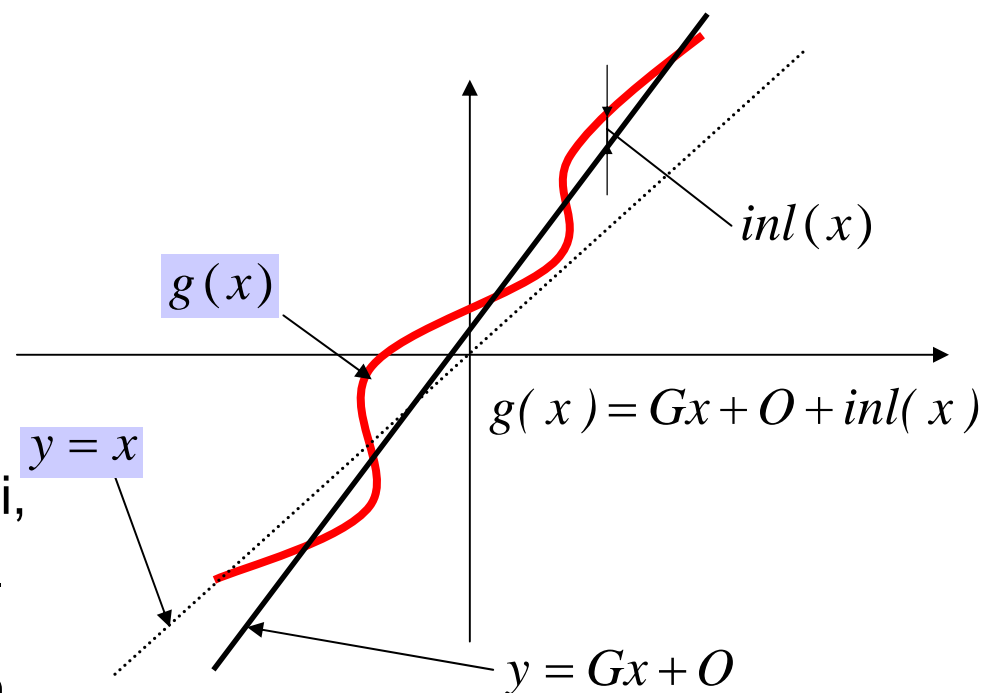


Considerare $quant(g(x))$ equivale a considerare un quantizzatore con soglie non equispaziate. Si noti che al posto di una $g(x)$ generica è sempre possibile considerare una opportuna funzione lineare a tratti (*piecewise linear*) $g_{pl}(x)$ che congiunge i punti (ξ_k, x_k)

La curva $g(x)$ è una caratteristica statica non lineare che approssima la “retta teorica” $y = x$ a pendenza 1 e offset 0

E' conveniente esprimere la $g(x)$ come somma di una parte lineare (che non distorce il segnale) e un residuo non lineare, detto nonlinearità integrale.

Come per il campionamento, quindi, decomponiamo l'errore sistematico nella somma di un *errore di guadagno*, un *errore di offset* ed un *errore di linearità*:



$$y = g(x) = Gx + O + inl(x) \implies e = y - x = (G - 1)x + O + inl(x) = \Delta G \cdot x + O + inl(x)$$

ΔG errore di guadagno

O errore di offset

inl nonlinearità integrale (*integral nonlinearity*).

Bisogna notare che i parametri G e O non sono univocamente individuati dalla $g(x)$.

Scelte tipiche di G e O :

- 1) tali da minimizzare il massimo modulo di $inl(x)$;
- 2) tali da congiungere gli estremi di $g(x)$;
- 3) tali da minimizzare lo scarto quadratico medio tra $g(x)$ e $Gx+O$

La nonlinearità integrale è quindi la differenza:

$$inl(x) = g(x) - Gx - O$$

Però noi conosciamo in realtà la $g(x)$ solo nei punti ξ_k , in cui sappiamo che $g(\xi_k) = x_k$. Quindi la nonlinearità integrale, nel caso di un ADC, è costituita dagli $M+1$ valori discreti

$$inl(\xi_k) = g(\xi_k) - G\xi_k - O = x_k - G\xi_k - O \quad k = 0 : M$$

Quindi la inl è la differenza tra livelli di soglia ideali e livelli di soglia reali (dopo correzione di guadagno e offset). Naturalmente essa è anche la differenza tra $g(x)$ e retta di riferimento $Gx+O$ calcolata nei punti i cui $g(x)$ è definita (i livelli di soglia reali ξ_k).

Oltre alla nonlinearità integrale si specifica spesso la nonlinearità differenziale. Essa è definita come segue:

$$dnl_k = Q - GQ_k = (x_k - x_{k-1}) - G(\xi_k - \xi_{k-1}) \quad k = 1 : M$$

ed è quindi la differenza tra la larghezza ideale e quella reale del k-esimo bin, dopo una correzione di guadagno.

E' facile verificare che $dnl_k = inl_k - inl_{k-1}$

Nota:

La *inl* e la *dnl* normalmente sono definite per un ADC facendo riferimento ai livelli di soglia reali; esse però possono essere definite anche per uno strumento analogico o un amplificatore di misura.

In questo caso si tratta teoricamente di quantità continue:

$$inl(x) = g(x) - Gx - O \quad dnl(x) = \left(\frac{dg(x)}{dx} - G \right) dx$$

In realtà anche uno strumento o un amplificatore analogico sono calibrati in un numero finito di punti di misura (analoghi alle soglie discrete ξ_k), e quindi si fa sempre riferimento a quantità discrete.

E' bene osservare che (come nel caso del campionamento reale):

- ▶ Queste quantità sono errori e non incertezze.
- ▶ Se gli errori fossero noti (calibrazione delle ampiezze) l'errore sistematico potrebbe essere in teoria totalmente rimosso

Normalmente la casa costruttrice fornisce una maggiorazione degli errori di ampiezza di uno strumento. Queste quantità sono incertezze.

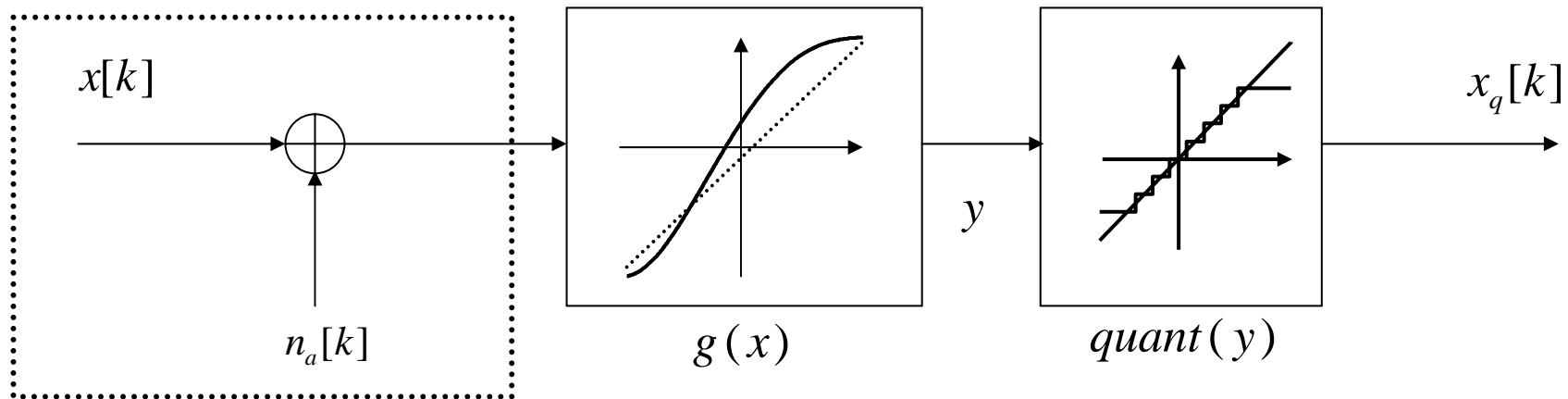
$|\Delta G| < U_G$ incertezza di guadagno

$|O| < U_O$ incertezza di offset

$|inl(x)| < U_{INL}$ incertezza di non linearità

Anche questi valori possono essere forniti in tutto, in parte o per niente, e in varie forme più o meno chiare e più o meno esplicite.

Per quanto riguarda *l'errore casuale* si può affermare che il rumore di ampiezza equivalente in ingresso è un normale rumore analogico gaussiano a media nulla e di varianza specificata dal costruttore (in termini di “tensione rms”).



Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza di rumore, esso di solito è bianco nel campo di frequenze di impiego dello strumento, essendo per lo più di origine termica. Comunque può anche essere colorato, ad esempio se lo strumento impiega internamente dei filtri, ecc.

In definitiva la quantizzazione reale è legata alla quantizzazione ideale dalla relazione:

$$x_q = \text{quant}(y) = x + \Delta Gx + O + \text{inl}(x) + n_a(t) + e_q(x)$$

e quindi

La quantizzazione reale equivale a una quantizzazione ideale eseguita su un segnale rumoroso e distorto

e

per determinare l'incertezza da cui è affetta una qualunque misura è necessario, a rigore, conoscere le quantità: U_G , U_O , U_{INL} , U_Q , σ_{na}^2

In uno strumento reale gli errori di ampiezza (quantizzazione) sono presenti simultaneamente a quelli di tempo (campionamento)

Come abbiamo visto, entrambi i tipi di errori comportano sia trasformazioni lineari (G , O in ampiezza, S , D nel tempo) sia distorsione e rumore (inl , n_a in ampiezza, tbd , n_t nel tempo).

Una figura di merito spesso usata per dare una quantificazione globale degli errori in uno strumento digitale è il numero di bit effettivi (ENOB):

$$SNR|_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_t^2} \right) = 6.02 \cdot ENOB + 1.76 \quad \Rightarrow \quad ENOB = \frac{SNR|_{dB} - 1.76}{6.02}$$

L'errore totale σ_t^2 è valutato con un ingresso sinusoidale e comprende solo distorsione e rumore, senza contare trasformazioni lineari.

Codifica

*La **codifica** è il processo di assegnazione a ciascuno degli stati discreti della quantizzazione di una parola in codice numerico (rappresentazione binaria)*

Un qualsiasi numero può essere espresso con precisione finita come

$$N_b = \sum_{i=-m}^n A_i \cdot b^i \text{ in cui } b \text{ è la base e } A_i \text{ (con } 0 \leq A_i \leq b-1) \text{ sono i}$$

coefficienti. Nel caso binario risulta:

$$L = N_2 = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot 2^i$$

L numero di livelli
 n numero di bit
 $A_i = 0, 1$

Quindi per codificare in binario L livelli occorre scegliere n in modo che $2^n \geq L$