POLITECNICO DI BARI
DIPARTIMENTO DI ELETTROTECNICA ED ELETTRONICA
GRUPPO MISURE ELETTRICHE ED ELETTRONICHE

Errori e Specifiche negli Strumenti di Misura

Definizioni preliminari…

• la **misurazione** è il processo che porta alla quantificazione di una grandezza fisica attraverso un valore numerico più o meno accurato;

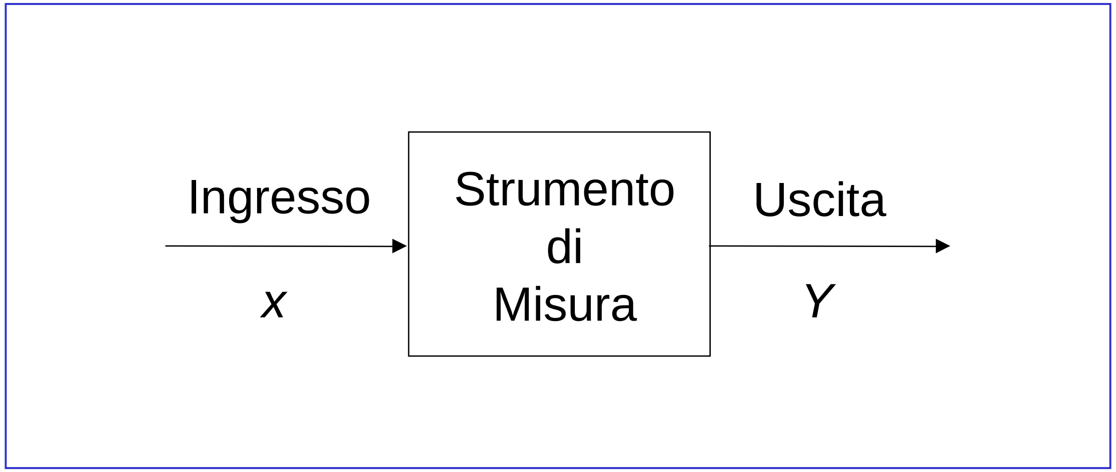
• la **misura** è un numero che esprime il risultato della misurazione.

Una **misura analogica** è il risultato di una elaborazione analogica eseguita direttamente sul segnale di ingresso mentre una **misura digitale** è il risultato di una elaborazione numerica eseguita su una versione digitalizzata del segnale di ingresso.

Gli **strumenti di misura** o i **sensori** sono dispositivi che effettuano una o più conversioni energetiche della grandezza da misurare per produrre in uscita un segnale che sia facile da elaborare, trasmettere e rappresentare.

L’analisi delle caratteristiche di uno strumento di misura (o di un sensore) richiede fondamentalmente lo studio delle relazioni fra gli ingressi e le uscite senza esaminare i processi di conversione che avvengono al suo interno.

Pertanto, *nella fase di caratterizzazione di uno strumento di misura si guarderà ad esso come a una “black-box” esaminando soltanto le sue relazioni ingresso-uscita.*



Vale la pena precisare che:

- per ogni strumento di misura (o sensore) esiste una relazione di ingresso-uscita *ideale* che permette di ottenere in uscita, anche in un'altra forma, il valore "vero" dello stimolo. E' ovvio che questo non si verifica mai nel caso reale.

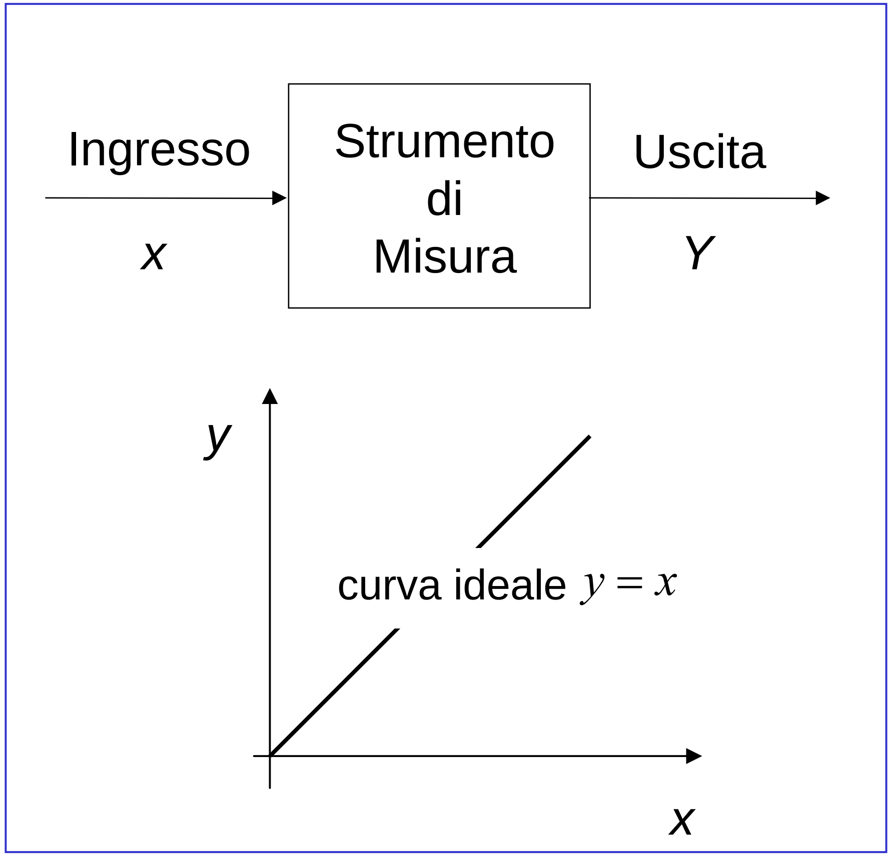
- questa relazione ideale viene espressa sotto forma di equazione matematica, di tabella o di grafico; essa può essere di tipo lineare o non lineare.

- nel funzionamento reale lo strumento di misura (o il sensore) è caratterizzato da un comportamento che si discosta più o meno significativamente da quello ideale. Per portare in conto questa <u>inaccuratezza</u> del dispositivo occorre misurare le deviazioni esistenti fra i valori reali e i valori ideali.

Errori negli strumenti

La *caratteristica ideale* o *teorica* di uno strumento di misura è una retta con pendenza (generalmente) unitaria

esistono tuttavia sensori inerentemente non lineari la cui caratteristica ideale può essere una curva con pendenza variabile da punto a punto



Se si fanno *M* misure di una stessa grandezza *x* di ingresso si ottengono in genere *M* valori y_i dell'uscita, diversi fra loro e diversi da *x*.

Questo effetto è dovuto alla contemporanea presenza di una componente di <u>errore sistematico</u> e di una componente di <u>errore casuale</u>. Possiamo pertanto affermare che in realtà l'uscita Y di uno strumento di misura è una variabile aleatoria.

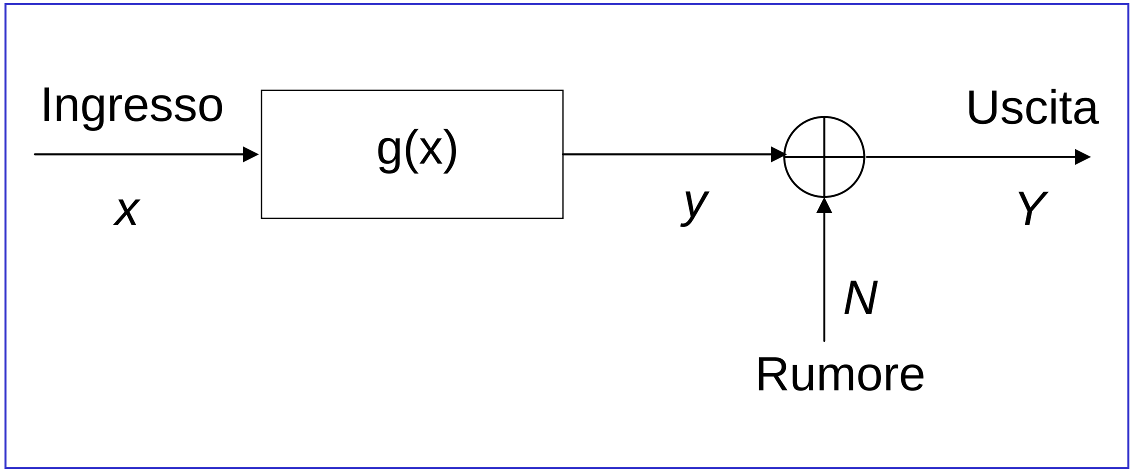
Se si indica con *y* il valore atteso dell'uscita :

$$y = E[Y] = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} y_i = \mu_y$$

e con *N* la variabile casuale:

$$N = Y - y$$

possiamo pensare allo strumento come ad un sistema non lineare senza memoria descritto da una funzione *g(x)* che trasforma *x* in *y* a cui è infine sommato un processo casuale a media nulla (rumore) che produce in uscita una variabile casuale *Y*:



dove <u>l'errore sistematico dello strumento</u> sarà:

$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

<u>l'errore casuale dello strumento</u> sarà invece:

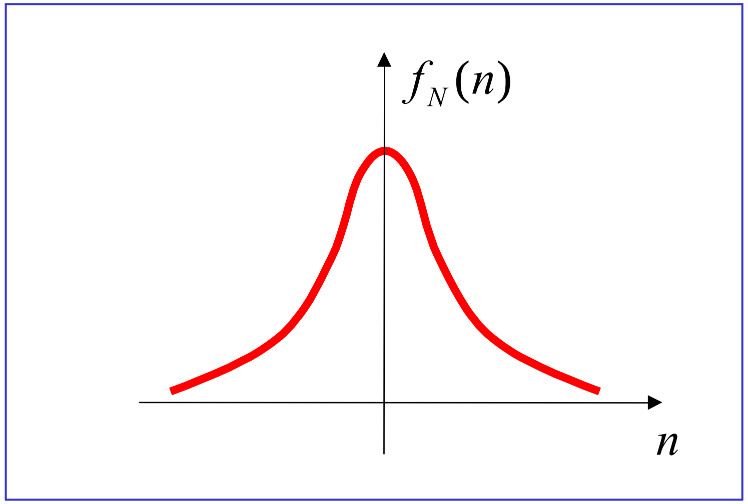
$$E_c = Y - y = N$$

e <u>l'errore totale</u> sarà la somma delle due componenti:

$$E_t(x) = Y - x = (Y - y) + (y - x) = E_c + E_s(x)$$

Generalmente la componente casuale di errore E_c ha distribuzione Gaussiana a media nulla

$$E\left[N\right]=E\left[Y-y\right]=E\left[Y\right]-E\left[y\right]=y-y=0$$



e varianza

$$var\left[N\right]=E\left[N^2\right]-E^2\left[N\right]=E\left[N^2\right]=\sigma_N^2$$

L'errore E_c avrà segno e valore variabili casualmente e una sua maggiorazione produrrà una incertezza con un determinato *livello di confidenza* L_c.

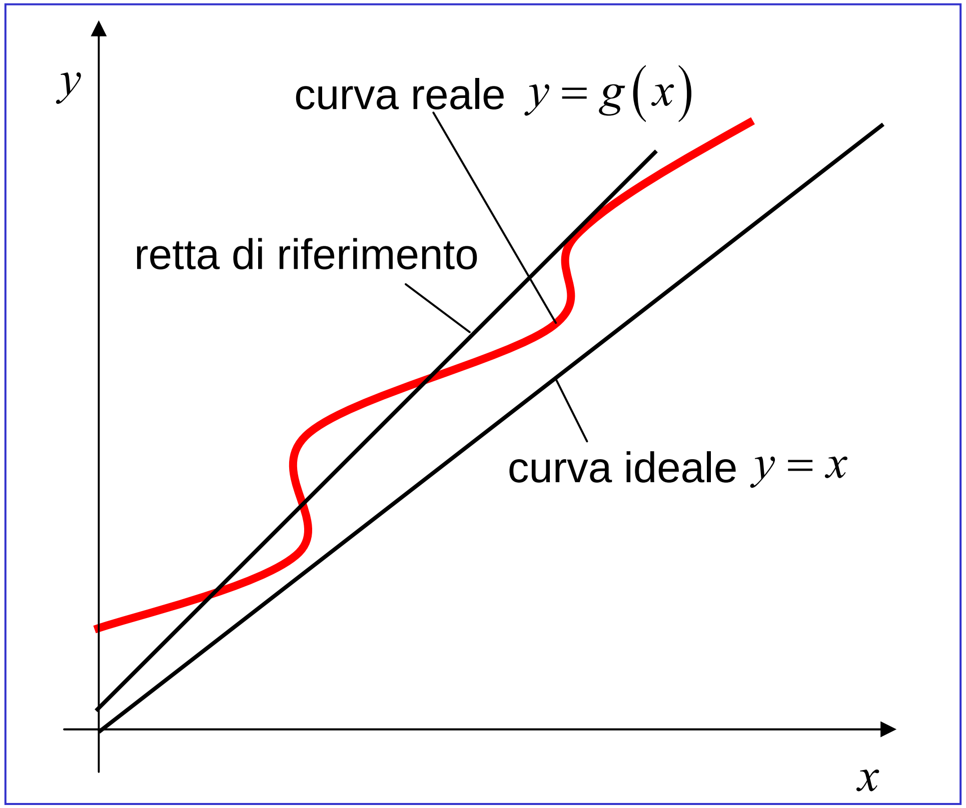
$$\left|E_c\right|=\left|Y-y\right|\leq U_{c_k}=k\cdot\sigma_N \qquad con \quad L_c=L_{c_k}$$

In particolare si può verificare che risulta:

$$k=1 \qquad \Rightarrow \qquad U_c=U_{c_1}=1\cdot\sigma_N \qquad \Rightarrow \qquad L_{c_1}\cong 68\%$$

$$k=2 \qquad \Rightarrow \qquad U_c=U_{c_2}=2\cdot\sigma_N \qquad \Rightarrow \qquad L_{c_2}\cong 95\%$$

$$k=3 \qquad \Rightarrow \qquad U_c=U_{c_3}=3\cdot\sigma_N \qquad \Rightarrow \qquad L_{c_3}\cong 99.7\%$$



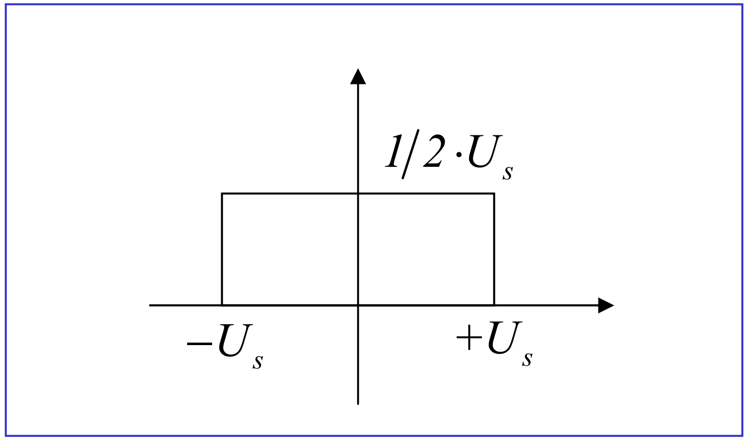
La componente sistematica di errore

$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

terrà conto dello scostamento dello strumento dal comportamento ideale (retta y=x).
La sua distribuzione sarà uniforme e si presenterà sempre con lo stesso segno e valore.
E' chiaro che questa componente può essere eliminata solo nel caso di funzione *g(x)* nota e invertibile.

Una maggiorazione dell'errore sistematico può essere ottenuta ricorrendo all'incertezza U_s (con L_c=*100%*):

$$|E_s(x)| = |y - x| \le U_s$$



Tenendo presente che per una distribuzione uniforme in un intervallo *[a,b]* la media e la varianza sono, rispettivamente:

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

nel nostro caso avremo:

$$\sigma_S^2 = \frac{4 \cdot U_s^2}{12} = \frac{U_s^2}{3} \quad \text{con} \quad L_c = 2 \cdot \sigma_S \frac{1}{2 \cdot U_s} = \frac{U_s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{U_s} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 58\%$$

E si può verificare facilmente che:

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad U_s = U_{s_1} = 1 \cdot \sigma_s \quad \Rightarrow \quad L_{c_1} \cong 58\%$$

$$k = 1.65 \quad \Rightarrow \quad U_s = U_{s_{1.65}} = 1.65 \cdot \sigma_s \quad \Rightarrow \quad L_{c_{1.65}} \cong 95\%$$

$$k = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad U_s = U_{s_{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \cdot \sigma_s \quad \Rightarrow \quad L_{c_{\sqrt{3}}} \cong 100\%$$

Riepilogando:

- in uno strumento di misura *la distribuzione della componente sistematica di errore può essere considerata uniforme* mentre *la distribuzione della componente casuale può essere considerata gaussiana*.
- per errori a distribuzione uniforme *l'incertezza standard* vale $\sigma_s = \frac{U_s}{\sqrt{3}}$ con livello di confidenza pari al *58%*, l'incertezza estesa con livello di confidenza pari al *95%* ha un fattore di copertura *k=1.65* e *l'incertezza di caso peggiore* con livello di confidenza pari al *100%* ha un fattore di copertura $k = \sqrt{3}$
- per errori a distribuzione gaussiana *l'incertezza standard* vale σ_N con livello di confidenza pari al *68%*, l'incertezza estesa con livello di confidenza pari al *95%* ha un fattore di copertura *k=2* e *l'incertezza di caso peggiore* (livello di confidenza pari al *100%*) vale ∞.

Ora è possibile calcolare l'incertezza complessiva introdotta dallo strumento di misura.

Supponendo $E_s(x)$ e E_c indipendenti potremo esprimere la varianza σ_t^2 come:

$$\sigma_t^2 = \sigma_N^2 + \sigma_S^2 = \sigma_N^2 + \frac{U_s^2}{3}$$

e scrivere l'<u>incertezza standard complessiva</u> come:

$$U_t = \sigma_t = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_S^2} = \sqrt{\sigma_N^2 + \frac{U_s^2}{3}}$$

dove la funzione densità di probabilità di E_t(x) dipende dalla funzione densità di probabilità di $E_s(x)$ che è uniforme e di E_c che è gaussiana.

Si può verificare che in questo caso (indipendenza degli errori), la funzione densità di probabilità (f.d.p.) di E_t(x) sarà data dalla convoluzione delle due densità:

$$f_t(x) = f_N(x) * f_S(x)$$

e il fattore di copertura *k* corrispondente a uno specifico livello di confidenza L_{ck} sarà calcolato utilizzando la f.d.p. risultante $f_t(x)$.

E' bene evidenziare che in molti casi può essere utile ricorrere al ***<u>teorema del Limite Centrale</u>*** che permette di approssimare la distribuzione risultante a quella normale in ipotesi piuttosto ampie.

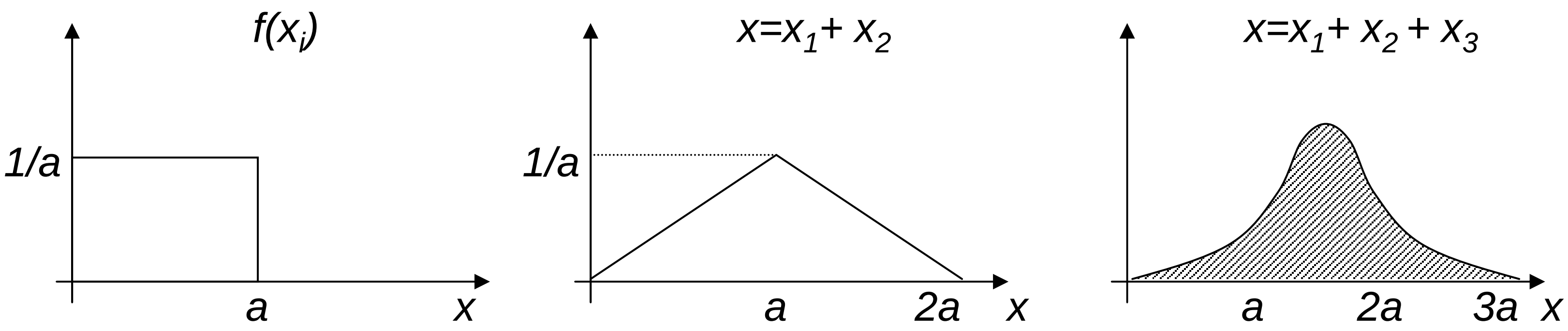
Più precisamente:

Il <u>teorema del Limite Centrale</u> afferma che, sotto condizioni abbastanza generali, la funzione densità di probabilità *f(x)* della somma di *n* variabili casuali indipendenti X_i tende ad una curva di distribuzione di tipo normale per $n \to \infty$:

$$x = x_1 + x_2 + \ \dots + x_n$$

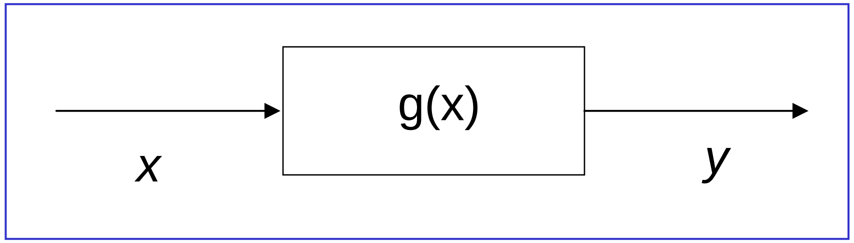
$$f_x(x) = f_{x_1}(x) * f_{x_2}(x) * \ \dots * f_{x_n}(x) \quad \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \quad f(x) \cong \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ e^{-(x-\mu_x)^2 / 2\sigma^2}$$

Ad esempio nel caso di distribuzione uniforme avremo:



Errori sistematici negli strumenti di misura

Si è visto che il blocco non lineare statico *g(x)* è causa di un errore sistematico dello strumento $E_s(x)$ dato dalla relazione:

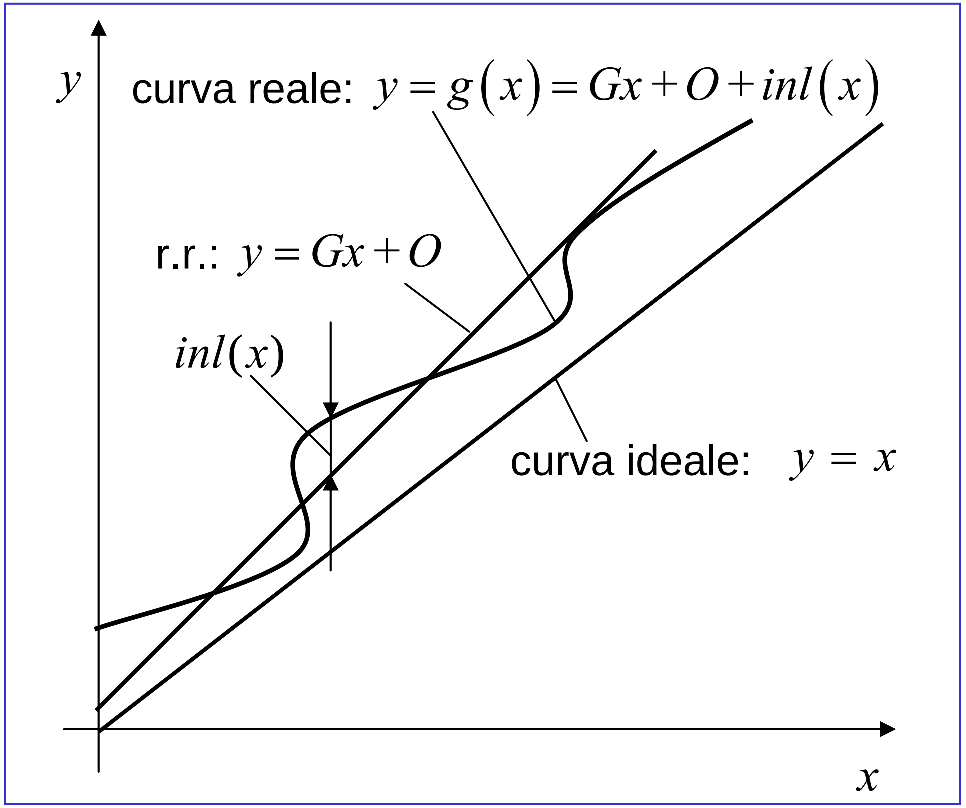


$$E_s(x) = y - x = g(x) - x$$

che porta in conto lo scostamento dello strumento dal suo comportamento ideale (retta y=x). Essa avrà distribuzione uniforme e si presenterà sempre con lo stesso segno e valore.

E' conveniente esprimere la g(x) come somma di una parte affine (che non distorce il segnale) e una parte non lineare, detta *nonlinearità integrale* (o *integral nonlinearity*).

E' bene notare che i parametri *G* e *O* non sono univocamente individuati dalla *g(x)*; quindi essi possono essere scelti in diversi modi.



Scelte tipiche per *G* (*guadagno*) e per *O (offset*):

1) tali che il massimo modulo di *inl(x)* risulti minimo;

2) tali che la retta da essi definita congiunga gli estremi di *g(x)*;

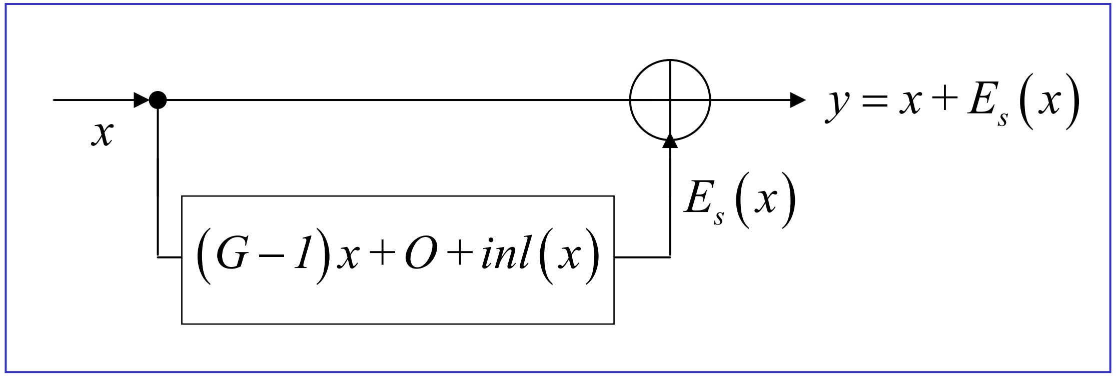
3) tali da minimizzare lo scarto quadratico medio tra *g(x)* e *Gx+O*

La nonlinearità integrale è comunque sempre data da:

$$inl(x) = g(x) - (Gx + O)$$

e l'errore sistematico può essere scritto come:

$$E_S(x) = y - x = g(x) - x = Gx + O + inl(x) - x = (G-1)x + O + inl(x)$$



Indicando con:

$\Delta G = G - 1$ l'errore di guadagno

O l'errore di offset

$inl(x)$ l'errore di nonlinearità

Es(x) può essere riscritto come:

$$E_S(x) = \Delta G \cdot x + O + inl(x)$$

A queste tre componenti sistematiche bisognerà aggiungere l'*errore di quantizzazione* $e_q(x)$ nel caso di strumentazione digitale e l'*errore di risoluzione* $e_\lambda(x)$, nel caso di strumentazione analogica.

In definitiva scriveremo:

$$\boxed{E_S(x) = \Delta G \cdot x + O + inl(x) + e_q(x)}$$ errore sistematico totale per strumento digitale

$$\boxed{E_S(x) = \Delta G \cdot x + O + inl(x) + e_\lambda(x)}$$ errore sistematico totale per strumento analogico

Specifiche degli strumenti di misura

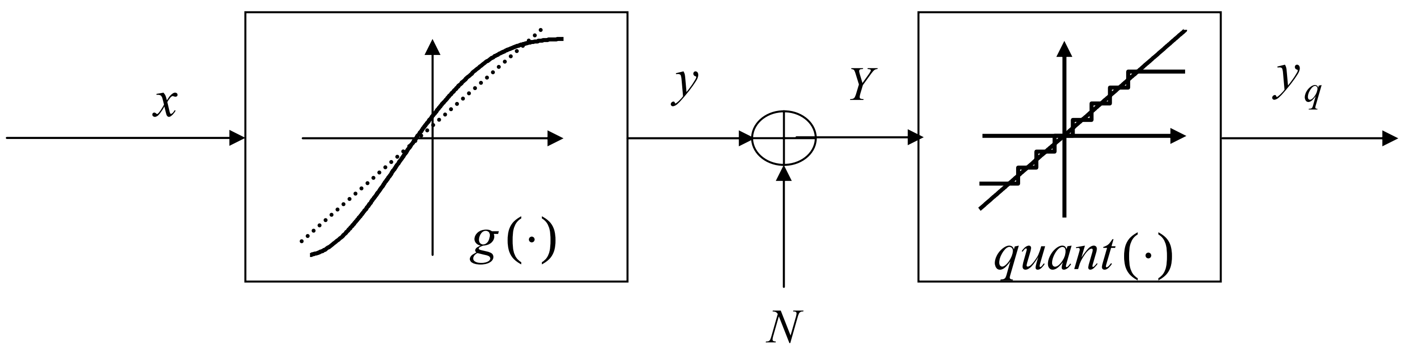
Dovendo calcolare l'incertezza da cui è affetta una qualunque misura dobbiamo partire da quello che i costruttori ci dicono sugli errori nei loro strumenti

Interpretare le note caratteristiche (*specifications*) della strumentazione spesso non è facile:

- non esiste uno standard sul modo di specificare le caratteristiche metrologi-che di uno strumento o di un sensore;
- i costruttori presentano le cose nel modo da loro ritenuto, volta per volta, "più significativo";
- alcune cifre sono, a volte, ambigue o errate.

E' essenziale possedere – oltre a una certa esperienza – alcune idee fonda-mentali sul comportamento degli strumenti di misura dal punto di vista degli errori

Per le ***misure di ampiezza*** *(tensione, corrente, ecc.) è possibile definire (riprendendo gli schemi precedenti o ricorrendo allo schema della quantizzazione non ideale) il modello semplificato di uno strumento per misure statiche* (esempio: multimetro)

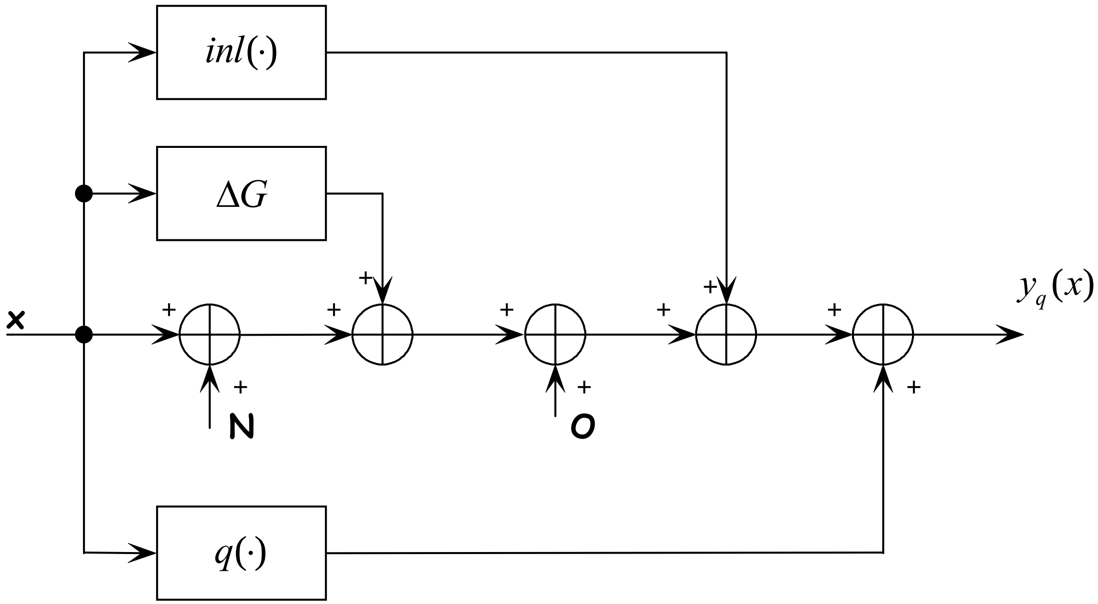


$$Y = g(x) + N = (1 + \Delta G)x + O + inl(x) + N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_q = quant(Y) = Y + e_q(Y) = Y + e_q(g(x)) \Rightarrow$$

$$E_t(x) = y_q - x = \underbrace{\Delta G x}_{\text{errore di guadagno}} + \underbrace{O}_{\text{errore di offset}} + \underbrace{inl(x)}_{\text{errore di linearità}} + \underbrace{e_q(g(x))}_{\text{errore di quantizzazione}} + \underbrace{N}_{\text{rumore}} = E_s(x) + E_c$$

che descrive il modello additivo d'errore complessivo (sistematico + casuale) rappresentabile come:



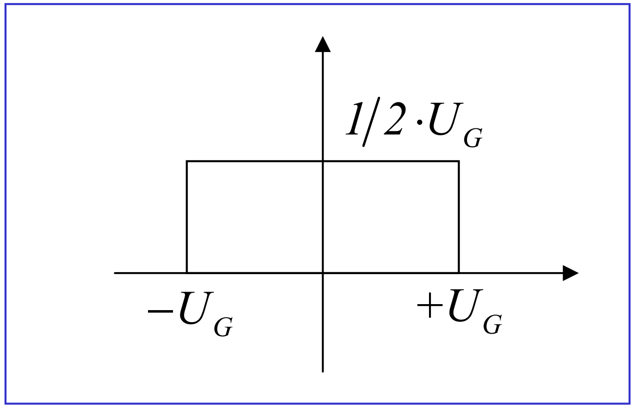
In termini generali, per sapere qualcosa di E_t è necessario scrivere la sua espressione (che coinvolge ΔG, O, $inl(x)$, N ed $e_q(x)$), e quindi dedurre ciò che è possibile in base alle informazioni che si hanno su questi parametri.

Generalmente il costruttore <u>non fornisce gli errori</u> ma una maggiorazione del loro valore assoluto (<u>incertezze</u>):

1) $|\Delta G| \leq U_G$ **incertezza di guadagno**

$U_{G_S} = \sigma_G = \dfrac{U_G}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard

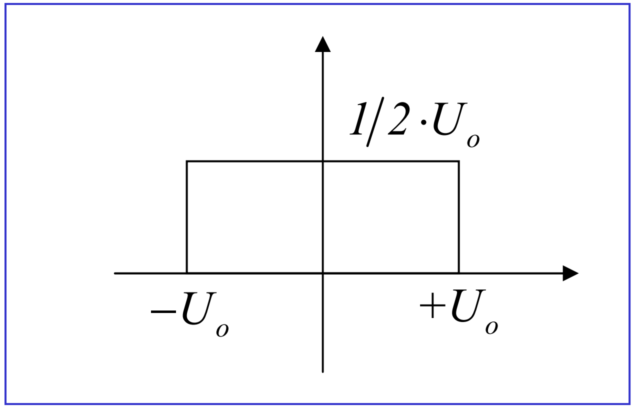
$U_{G_{100}} = U_G$ Incertezza di caso peggiore



2) $|O| \leq U_o$ **incertezza di offset**

$U_{O_S} = \sigma_O = \dfrac{U_o}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard

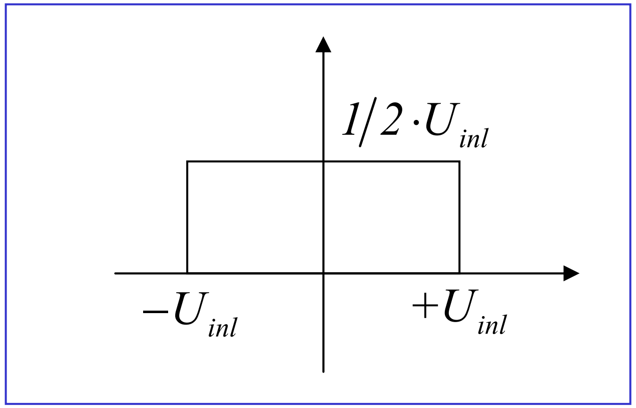
$U_{O_{100}} = U_O$ Incertezza di caso peggiore



3) $|inl(x)| \le U_{inl}$ **incertezza di nonlinerità**

$U_{inl_S} = \sigma_{inl} = \dfrac{U_{inl}}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard

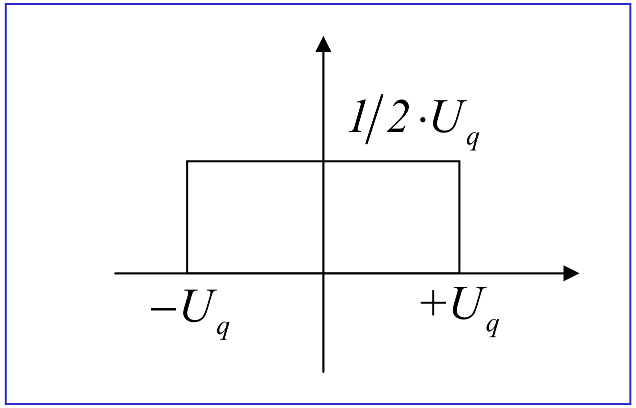
$U_{inl_{100}} = U_{inl}$ Incertezza di caso peggiore



4) $|e_q(x)| \le U_q$ **incertezza di quantizzazione**

$U_{q_S} = \sigma_q = \dfrac{U_q}{\sqrt{3}}$ Incertezza standard

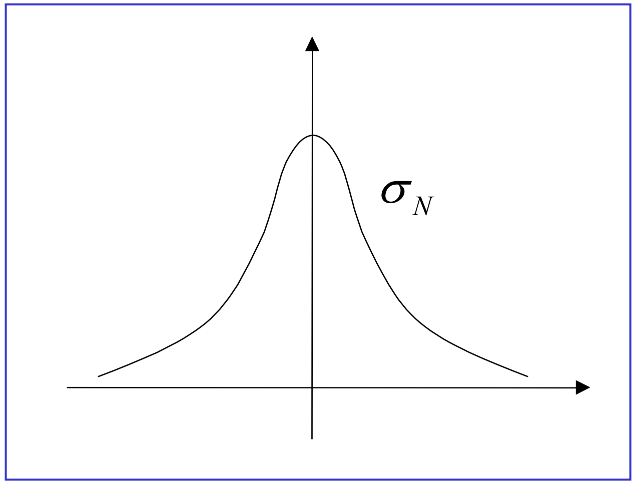
$U_{q_{100}} = U_q$ Incertezza di caso peggiore



5) $|E_c| = |Y - y| \leq U_{N_k}$ **incertezza di rumore**

$U_{C_S} = \sigma_N$ Incertezza standard

$U_{C_{100}} = \infty$ Incertezza di caso peggiore



Sono queste incertezze che ci permettono di ricavare l'incertezza complessiva su una misura diretta o indiretta

*Per le **misure di tempo** in uno strumento è possibile ripetere un discorso del tutto analogo a quello svolto finora, con le seguenti corrispondenze* (esempio: oscilloscopio) *:*

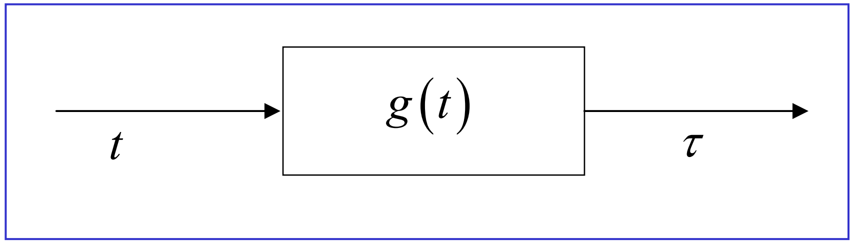
$|O| \leq U_O \quad \rightarrow \quad |D| \leq U_D$ incertezza di ritardo del trigger

$|\Delta G| \leq U_G \quad \rightarrow \quad |\Delta S| \leq U_S$ incertezza della velocità di spazzolamento

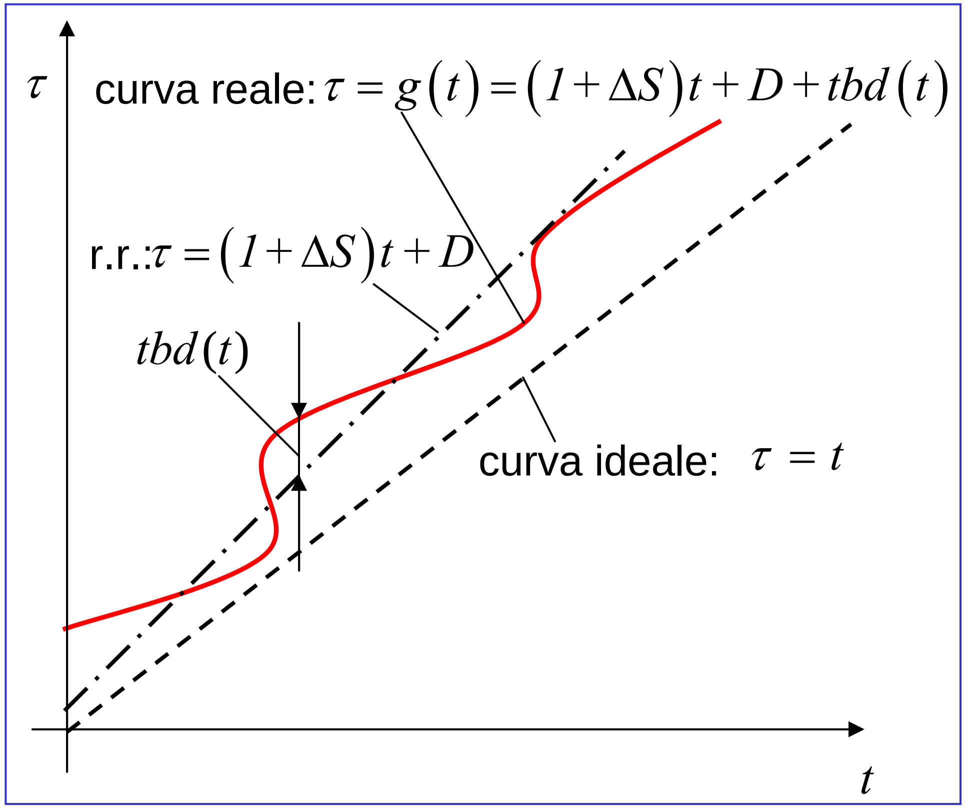
$|inl(x)| \leq U_{inl} \quad \rightarrow \quad |tbd(t)| \leq U_{tbd}$ incertezza della distorsione della base tempi

$|e_q(x)| \leq U_q = Q/2 \quad \rightarrow \quad |e_{T_c}(t)| \leq U_{T_c} = T_c/2$ incertezza di risoluzione temporale

Infatti, l'errore sistematico statico della base dei tempi può essere scritto come:



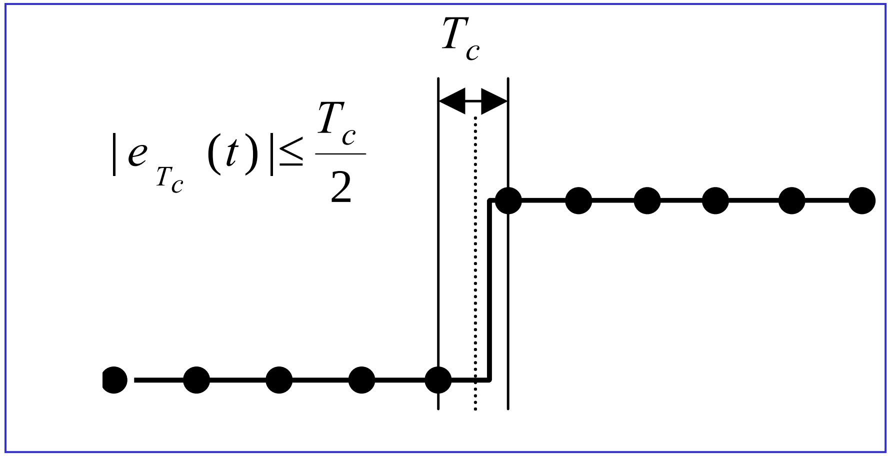
$$E_S(t) = \tau - t = g(t) - t =$$
$$= (1 + \Delta S)t + D + tbd(t) - t = \Delta S \cdot t + D + tbd(t)$$



Esso porta in conto lo scostamento della base dei tempi dello strumento dal suo comportamento ideale (retta $t=\tau$). E_s avrà distribuzione uniforme e si presenterà sempre con lo stesso segno e valore. Anche in questo caso, è conveniente esprimere la *g(t)* come somma di una parte lineare e una parte non lineare.

In un oscilloscopio digitale, la <u>risoluzione temporale</u> è determinata dal periodo di campionamento T_c che svolge nell'asse dei tempi il ruolo di *Q* nell'asse delle ampiezze.

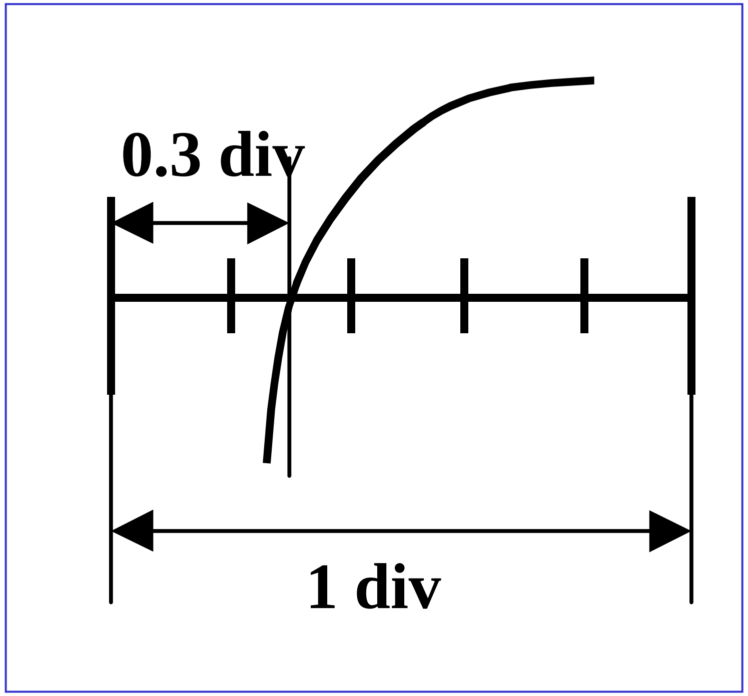
L'incertezza di risoluzione temporale è quindi dovuta all'intervallo di campionamento non infinitesimo che implica che un "evento" è localizzato con un errore che non supera la metà del periodo.



Anche in un oscilloscopio analogico, le misure di tempo sono soggette a quantizzazione per il semplice fatto che anche in questo caso esprimiamo il risultato della misura con un numero finito di cifre.

• L'incertezza di risoluzione temporale, nell'ipotesi realistica di apprezzare 1/10 di divisione, sarà:

$$T_c = \frac{1}{10} div \quad \Rightarrow U_{T_c} = \frac{1}{20} div$$



• Con lo stesso ragionamento otteniamo che l'incertezza di risoluzione sulle ampiezze (i. di quantizzazione), varrà:

$$\lambda = \frac{1}{10} div \quad \Rightarrow U_{\lambda} = \frac{1}{10} div$$

In definitiva, per misure nel tempo si può scrivere :

$$\boxed{E_s(t) = \tau - t = \Delta s \cdot t + D + tbd(t) + e_{T_c}}$$

1° caso: misura diretta in assenza di rumore (N = 0)

se conosciamo le singole incertezze di guadagno, offset, nonlinearità e quantizzazione, ci risulta facile determinare l'incertezza complessiva sulla misura diretta y_q

$$|E_t| = |y_q - x| = |\Delta G x + O + inl(x) + e_q(g(x))| \le$$

disuguaglianza triangolare

$$\le |\Delta G x| + |O| + |inl(x)| + |e_q(g(x))| \le$$

$$\le U_G |x| + U_O + U_{inl} + U_q \cong$$

disuguaglianza errore-incertezza (caso peggiore)

$$\boxed{\cong U_G |y_q| + U_O + U_{inl} + U_q = U_{tot}}$$

<u>incertezza totale (di caso peggiore) su una misura diretta</u>

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che in questa, come in quasi tutte le valutazioni di incertezza, possiamo sostituire *x* (valore "vero" del misurando che non conosciamo) con y_q (risultato della misura, che conosciamo).

Pertanto, in questo caso:

$$\boxed{U_{tot_{100}}(y_q) = U_G\,|\,y_q\,| + U_O + U_{inl} + U_q}$$

<u>incertezza totale di caso peggiore o incertezza estesa con livello di confidenza al 100%</u>

Poiché le componenti di errore di guadagno, offset, nonlinearità e quantizzazione sono tra loro indipendenti avremo:

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_G^2 \cdot y^2 + \sigma_O^2 + \sigma_{inl}^2 + \sigma_q^2 = \frac{1}{3}\left(U_G^2 \cdot y^2 + U_O^2 + U_{inl}^2 + U_q^2\right)$$ da cui:

$$\boxed{U_{S\,tot}(y_q) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(U_G^2 \cdot y^2 + U_O^2 + U_{inl}^2 + U_q^2\right)}}$$

<u>incertezza totale standard</u>

La fdp[1] dell'errore totale è a rigore la convoluzione di quattro fdp rettangolari; se le ampiezze delle quattro fdp sono tra loro confrontabili, la distribuzione complessiva può essere considerata approssimativamente gaussiana ed è possibile calcolare il livello di fiducia corrispondente.

[1] fdp = funzione densità di probabilità

misura diretta in presenza di rumore (N ≠ 0)

$$U_{tot_{100}}(y_q) = \infty$$

incertezza totale di caso peggiore

e:

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_N^2 + \frac{1}{3}\left(U_G^2 \cdot y^2 + U_O^2 + U_{inl}^2 + U_q^2\right)$$

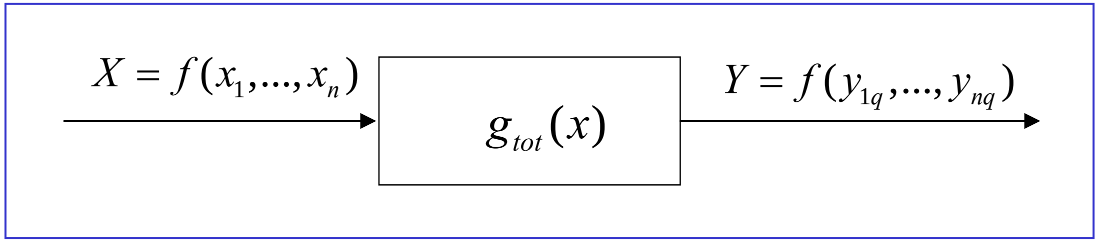
da cui:

$$U_{Stot}(y_q) = \sqrt{\sigma_N^2 + \frac{1}{3}\left(U_G^2 \cdot y^2 + U_O^2 + U_{inl}^2 + U_q^2\right)}$$

incertezza totale standard

2°caso: misura indiretta

In questo caso è possibile effettuare una valutazione dell'incertezza complessiva senza maggiorazioni "esagerate"



In generale, se abbiamo la misura indiretta $Y = f(y_{1q},...,y_{nq})$ dobbiamo maggiorare il valore assoluto dell'errore $|E_{tot}| \le |Y - X|$ essendo $X = f(x_1,...,x_n)$.

Scrivendo la formula di propagazione degli errori:

$$E_{tot} = Y - X = \frac{\partial f}{\partial y_{q1}} E_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_{qn}} E_n$$

e maggiorando, si ottiene l'incertezza totale di caso peggiore:

$$|E_{tot}| = |Y - X| \le \boxed{\left|\frac{\partial f}{\partial y_{q1}}\right| U_1 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial y_{qn}}\right| U_n = U_{tot_{100}}(Y)}$$

dove si è fatto uso della disuguaglianza triangolare e della disuguaglianza errore-incertezza.

Per il calcolo dell'incertezza totale standard occorre tenere conto della possibile correlazione tra gli errori:

$$\sigma_{tot}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{qi}} \right)^2 \sigma_{y_{qi}}^2 + 2 \sum_{i>j}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_{qi}} \frac{\partial f}{\partial y_{qj}} \sigma_{y_{qi}} \sigma_{y_{qj}} \rho_{yqi,yqj}$$

da cui:

$$\boxed{U_{S\,tot}(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{qi}} \right)^2 \sigma_{y_{qi}}^2 + 2 \sum_{i>j}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_{qi}} \frac{\partial f}{\partial y_{qj}} \sigma_{y_{qi}} \sigma_{y_{qj}} \rho_{yqi,yqj}}}$$

incertezza totale standard su misura indiretta

dove il secondo termine sotto la radice è zero se gli errori E_i sono incorrelati.

Queste espressioni possono condurre a una maggiorazione esagerata dell'incertezza se alcune misure sono fatte in condizioni particolari.

Ad esempio se le misure sono fatte con lo stesso strumento sulla stessa portata, gli errori di guadagno, offset, ecc. sono sempre gli stessi e sono quindi in qualche modo tra loro correlati

Un'attenta analisi produce una valutazione più appropriata dell'incertezza complessiva

esempio: *l'uscita è la* *differenza di misure* *(tensione picco-picco) del tipo* $\boxed{y_q = y_{2q} - y_{1q}}$

In questo caso scriveremo:

$x = x_2 - x_1$ misurando

$y_q = y_{2q} - y_{1q}$ misura

errore:

$$E_{tot} = y_q - x = (y_{2q} - y_{1q}) - (x_2 - x_1) = E_2 - E_1 =$$

$$= \left(\Delta G_2 \cdot x_2 + O_2 + inl(x_2) + e_q(x_2)\right) - \left(\Delta G_1 \cdot x_1 + O_1 + inl(x_1) + e_q(x_1)\right) =$$

$$\textit{se la portata è la stessa} \text{ si ha: } \begin{cases} \Delta G_2 = \Delta G_1 = \Delta G \\ \\ O_2 = O_1 = O \end{cases}$$

$$E_{tot} = \Delta G(x_2 - x_1) + inl(x_2) - inl(x_1) + e_q(x_2) - e_q(x_1)$$

Si noti che l'errore di offset scompare e l'errore di guadagno moltiplica la differenza delle misure. Invece su nonlinearità e quantizzazione non sappiamo nulla che ci permetta di manipolare i termini. Calcoliamo l'incertezza di caso peggiore:

$$|E_{tot}| = |\Delta G(x_2 - x_1) + inl(x_2) - inl(x_1) + e_q(x_2) - e_q(x_1)| \le$$

$$|\Delta G| |x_2 - x_1| + |inl(x_2) - inl(x_1)| + |e_q(x_2) - e_q(x_1)|$$

Ora possiamo scrivere le seguenti maggiorazioni:

$$|\Delta G||x_2 - x_1| \le U_G |x_2 - x_1| \cong U_G |y_{2q} - y_{1q}|$$

$$|inl(x_2) - inl(x_1)| \le |inl(x_2)| + |inl(x_1)| \le 2U_{inl}$$

$$|e_q(x_2) - e_q(x_1)| \le |e_q(x_2)| + |e_q(x_1)| \le 2U_q$$

e in definitiva:

$$\boxed{U_{tot_{100}}(y_{2q} - y_{1q}) = U_G |y_{2q} - y_{1q}| + 2U_{inl} + 2U_q}$$

<u>incertezza totale di caso peggiore</u>

Se invece si ricorre alla formula di propagazione (ipotesi di errori indipendenti) si ottiene:

$$|E_{tot}| \le U(y_{2q}) + U(y_{1q}) = U_G(|y_{2q}| + |y_{1q}|) + 2U_O + 2U_{inl} + 2U_q =$$

$$= U_{tot_{100}}^{indip}(y_{2q} - y_{1q}) > U_{tot_{100}}(y_{2q} - y_{1q})$$

e quindi sovrastimiamo (spesso anche di molto) l'incertezza.

In questo caso la varianza complessiva sarà:

$$\sigma_{tot}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{q_i}} \right)^2 \sigma_{y_{q_i}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{q_i}} \right)^2 \frac{U_i^2}{3} = \frac{1}{3}\left(U_G^2 y_q^2 + 2U_{inl}^2 + 2U_q^2 \right)$$

da cui:

$$\boxed{U_{tot_s}(y_q) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(U_G^2 y_q^2 + 2U_{inl}^2 + 2U_q^2 \right)}}$$

incertezza totale standard

<u>Esempio 2</u>: l'uscita è il rapporto di misure: $\boxed{y_q = \frac{y_{2q}}{y_{1q}}}$

Scriveremo:

$$x = \frac{x_2}{x_1}$$ misurando

$$y_q = \frac{y_{2q}}{y_{1q}}$$ misura

Si può mostrare che in questo caso sarà <u>l'errore di guadagno a semplificarsi</u>.

E' chiaro che se il rumore dovesse risultare non nullo occorrerà aggiungere la varianza σ^2_N all'espressione dell'incertezza totale standard.

Esempi di specifiche degli strumenti di misura

I costruttori di strumenti (nella sezione "<u>specifications</u>") forniscono informazioni sull'errore, basandosi sulla sua espressione in termini di guadagno, offset, nonlinearità, rumore ecc.

Purtroppo ciò non avviene seguendo uno standard o regole precise, il che impone di "<u>interpretare</u>" caso per caso i dati forniti.

Si è visto che, nell'ipotesi di rumore trascurabile, un modo naturale e conveniente di specificare gli errori è quello di ricorrere alle incertezze U_G, U_O, U_{inl}, U_q, per gli errori <u>sistematici di ampiezza</u> e alle incertezze U_S, U_D, U_{tbd}, U_{TC}, per gli <u>errori sistematici di tempo</u>.

Leggendo le specifiche dobbiamo cercare di ricondurci a questa descrizione, quando possibile.

• Multimetro HP974A dispaly a “4 1/2 cifre” (±49999 punti di misura)

Analizziamo le specifiche per individuare U_G, U_O, U_{inl}, U_q:

Range	Resolution	Accuracy	Input Resistance
500 mV	10 µV	± (0.05% + 2)	> 1000 MΩ
5 V	100 µV		11 MΩ (nominal)
50 V	1 mV		10 MΩ (nominal)
500 V	10 mV		
1000 V	100 mV		

- la risoluzione è il passo di quantizzazione Q (=1 LSB); poiché il display è a “4 1/2 cifre” essa non è altro che 1/50000 del valore di fondo scala:

$$range = \left[-V_{FS}, V_{FS} \right] \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V_{FS}}{0.5 \cdot 10^5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_q = \frac{Q}{2} = 0.5\, LSB}$$

- la “accuracy” (in realtà incertezza) è data con una formula binomia; essa è composta da una parte proporzionale alla lettura e una pari a un numero fisso di LSB (quindi proporzionale alla portata).

Per interpretare la formula binomia consideriamo nuovamente l'incertezza in una misura diretta:

$$U = 0.05\% + 2 \longrightarrow U_{tot}(y_q) = U_G \, | y_q | + U_O + U_{inl} + U_q$$

Domande:

1) la formula binomia comprende tutte le componenti di incertezza (in particolare U_q)?

2) Quali componenti sono inglobate nell'uno e quali nell'altro termine?

Per rispondere a queste domande non abbiamo molte indicazioni per cui possiamo fare solo supposizioni e ragionamenti inevitabilmente opinabili.

Per quanto riguarda la prima domanda possiamo pensare (a meno di avviso contrario) che la formula includa tutta l'incertezza, compresa U_q.

Per quanto riguarda la seconda domanda, è ovvio attribuire al primo termine la componente U_G e al secondo U_O e U_q (che non possono essere proporzionali alla lettura).

La U_{inl} non può essere trascurabile (altrimenti sarebbe elementare correggere l'errore di offset) e deve quindi essere conglobata nell'uno o nell'altro termine. Possiamo ipotizzare che U_{inl} sia inclusa nel secondo termine.

Questo vuol dire che, scrivendo $U = 0.05\% + 2$, il secondo termine <u>non è un puro errore di offset</u>, e infatti già abbiamo supposto che comprenda l'errore di quantizzazione (che non si semplifica in una differenza). Se però comprendesse il solo errore di quantizzazione, sarebbe stato ovvio scrivere qualcosa del tipo "offset = ±1.5 LSB", invece di dare un errore complessivo di 2 LSB. Quindi la interpretazione è la seguente:

$$|\Delta G \cdot y_q| \leq U_G |y_q|$$

$$|O + inl(x) + e_q(g(x))| \leq U_{O+inl+q}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U_G = 0.05\% \\ U_{O+inl+q} = 2\,LSB \end{array}}$$

In definitiva, accettando questa interpretazione, non possiamo sottrarre l'errore di offset nel caso di differenza di misure.

• Oscilloscopio HP54603B   8 bit (256 punti di misura)

Analizziamo le specifiche delle ampiezze per individuare U_G , U_O , U_{inl} , U_q :

Acquisition System

Maximum sample rate	20 MSa/s
Resolution	8 bits
Simultaneous channels	Channels 1 and 2 or channels 3 and 4
Record length	
Vectors off	4,000 points
Vectors on and/or single shot	2,000 points
Channels 1 and 2 Range	2 mV/div to 5 V/div
Accuracy	±1.9% (HP 54600B, HP 54601B, and HP 54602B)
	±2.4% (HP 54603B)
Cursor accuracy:	
Single cursor accuracy:	vertical accuracy ±1.2% of full scale ±0.5% of position
Dual cursor accuracy:	vertical accuracy ±0.4% of full scale

- L'errore di quantizzazione è:

$$Q = \frac{y_{qFS}}{2^b} = \frac{y_{qFS}}{256} = 0.4\% y_{qFS} = \frac{8}{256} div = \frac{1}{32} div \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_q = \frac{Q}{2} = 0.2\% y_{qFS} = {}^{1}\!/_{64}\, div}$$

- L’espressione per la “measurement accuracy” nei due casi di “single cursor” (*misura diretta*) e “dual cursor” (*differenza di misure*) fornisce la chiave di lettura delle specifiche. Osserviamo quindi che la specifica:

Dual cursor accuracy:	vertical accuracy ±0.4% of full scale

corrisponde alla formula dell’incertezza di una differenza:

$$U(y_q" - y_q') = U_G \, | y_q" - y_q' | + 2U_{inl} + 2U_q$$

mentre la specifica:

Single cursor accuracy:	vertical accuracy ±1.2% of full scale ±0.5% of position

corrisponde alla formula per la misura diretta:

$$U(y_q) = U_G \, | y_q | + U_O + U_{inl} + U_q$$

Notiamo che nelle specifiche il costruttore sembra non riportare la U_{INL}.

Non si deve pensare però che essa sia "trascurabile", ma al più che essa sia in qualche modo conglobata nella "vertical accuracy".

Quindi scriveremo:

$$|\Delta Gx + inl(x)| \le U_{G+inl}\,|x| \le U_{G+inl}\,|y_q|$$

$$|\Delta G(x''-x') + inl(x'') - inl(x')| \le U_{G+inl}\,|x''-x'| \le U_{G+inl}\,|y_q''-y_q'|$$

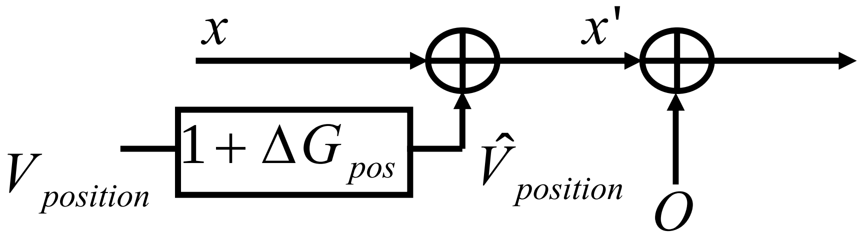
$$\boxed{U_{G+inl} = 2.4\% = 0.025}$$

introducendo così, ad hoc, l'incertezza U_{G+inl} che maggiora la somma di errore di guadagno e di linearità sia per misura diretta che per differenza di misure. Se si vuole separare l'errore di guadagno da quello di linearità occorre una prova apposita.

Di conseguenza lo *0.4%* nel caso "dual cursor" corrisponde al termine $2U_q$ mentre il termine *1.2%* nel caso "single cursor" comprende $U_q + U_O$ da cui:

$$\boxed{U_O = 1.0\%\, y_{q_{FS}} = \frac{1}{100} 256\, Q = 2.56\, Q}$$

Infine, la specifica dello *0.5%* di posizione nel caso “single cursor” precisa che all’incertezza sull’offset proporzionale al fondo scala (*1%*) occorre aggiungere un’altra componente (*0.5%*) proporzionale alla “posizione verticale” della traccia (offset) secondo un modello del tipo:



$$\boxed{|\Delta G_{pos}| \le U_{G_{pos}} = 0.5\% = 0.05}$$

Quest’ultima componente di incertezza (presente in molti oscilloscopi) evidenzia che se si seleziona un “offset” non nullo, cioè uno spostamento verticale della forma d’onda, la misura è affetta da un ulteriore errore pari allo *0.5%* dello spostamento.

Analizziamo le specifiche della base dei tempi per individuare $U_D, U_S, U_{tbd}, U_{T_c}$

Delta t accuracy	±0.01% ±0.2% of full scale ±200 ps
Vernier	Accuracy ±0.05%
Horizontal resolution	100 ps
Delay jitter	10 ppm
Resolution	255 vertical by 500 horizontal points

- Poiché una traccia è lunga *10 div*, essa dura, in unità di tempo, $10K_t$; tenuto conto che la risoluzione temporale è di *500* punti, risulta che l'errore di risoluzione è pari a:

$$T_c = \frac{10 \cdot K_t}{500} = 0.02 \cdot K_t = 0.2\% \tau_{FS} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{T_c} = \frac{T_c}{2} = 0.01 \cdot K_t = 0.1\% \tau_{FS}}$$

- L'interpretazione della "*delta t accuracy*" ci è data dalla formula per l'incertezza sulla differenza di due misure di tempo (si parla infatti di "delta t"):

$$U(\tau_{sa}'' - \tau_{sa}') = U_S \, |\tau_{sa}'' - \tau_{sa}'| + 2U_{tbd} + 2U_{T_c}$$

Notiamo che nella formula il coefficiente *0.01%* coincide con la “time base accuracy” che quindi interpretiamo come incertezza sulla velocità di sweep:

$$\boxed{U_S = 0.01\% = 0.0001}$$

Il termine *0.2%* del fondo scala corrisponde proprio a $2U_{T_c}$ mentre il termine *200 ps* è proprio $2U_{tbd}$; quindi:

$$\boxed{U_{tbd} = 100\,ps}$$

• Scheda DAQ NB-A2000 12 bit (4096 punti di misura)

Analog resolution	12-bit, 1 in 4,096
Offset voltage	±0.2 LSB maximum after calibration
Gain error	±1 LSB maximum
Differential nonlinearity	±0.3 LSB typical, ±0.75 LSB maximum
Integral nonlinearity	±0.3 LSB typical, ±1 LSB maximum
Relative accuracy	±0.8 LSB typical, ±1.5 LSB maximum

Notiamo che questo strumento di concezione più moderna ha delle specifiche piuttosto chiare.

- L'errore di quantizzazione è:

$$Q = \frac{y_{qFS}}{2^b} = \frac{y_{qFS}}{4096} = 0.000244 = 0.024\% y_{qFS} \quad \Rightarrow \boxed{U_q = \frac{Q}{2} = 0.000122 = 0.012\% y_{qFS}}$$

• Poiché dobbiamo ricavare le incertezze occorre fare riferimento ai valori massimi indicati e non a quelli "tipici":

$$\boxed{U_O = 0.2\,Q \cong 0.0049\%\, y_{q_{FS}}}$$

$$\boxed{U_{inl} = 1\cdot Q \cong 0.024\%\, y_{q_{FS}}}$$

mentre la specifica "relative accuracy" rappresenta la somma $U_q + U_{inl}$

• l'errore di guadagno in questo caso ci viene fornito in LSB. La ovvia interpretazione è, tenendo conto che questa scheda ha range bipolare *(±5 V)*:

$$U_G \left| y_{q_{MAX}} \right| = 1\cdot Q \quad \Rightarrow \boxed{U_G = \frac{Q}{\left| y_{q_{MAX}} \right|} = \frac{Q}{Q\cdot M/2} = \frac{1}{2048} = 0.00049 = 0.049\%}$$

In questo caso di componenti d'errore totalmente separate è possibile produrre una valutazione più appropriata dell'incertezza complessiva

(come ad esempio sottrarre l'errore di offset nel caso di differenza di misure, ecc.)